ANWENDUNG DER EXPONITIALFUNKTION IN DER

Z U V E R L A S S I G K E I T S P R Ü F U N G

Monika Weiss, TGM Wien

Im Volksmund versteht man unter Qualitätswaren solche, die sehr hohen Ansprüchen genügen. Oft sieht man sie im Gegensatz zum Massenartikel.

Die in der Industrie verwendete ÖVQ-Definition[1] lautet:

> Qualität ist die Gesamtheit von Eigenschaften und Merkmalen eines Produkts oder einer Tätigkeit, die sich auf deren Eignung zur Erfüllung gegebener Erfordernisse beziehen.
>
> Anmerkung 1: Die Erfordernisse ergeben sich aus dem Verwendungszweck des Produkts oder dem Ziel der Tätigkeit, unter Berücksichtigung der Realisierungsmöglichkeiten.
>
> Anmerkung 2: Ein Produkt ist z.B. jede Art von Waren und Rohstoffen aber auch der Inhalt von Konzepten und Entwürfen.
> Eine Tätigkeit ist z.B. jede Art von Dienstleistung, aber auch ein maschineller Arbeitsablauf wie ein Verfahren oder ein Prozeß.
>
> Anmerkung 3: Von der Verwendung der Benennung "Güte" synonym zu "Qualität" wird mit Rücksicht auf die internationale Normung abgeraten.
> Wird "Güte" benutzt - wie vielfach im behördlichen Bereich -, soll diese Benennung nur als Synonym zu "Ausführungsqualität" verwendet werden.
>
> Anmerkung 4: Qualität wird durch alle Qualitätsanteile im Qualitätskreis[2] bestimmt.
>
> Anmerkung 5: Die Erfordernisse schließen in der Regel auch Sicherheit, Umweltschutz und angemessenen Mitteleinsatz ein.

Wir sehen:
Qualität ist auf vorgegebene Erfordernisse bezogen. Es gibt keinen absoluten Maßstab für Qualität. In diesem Sinn können sowohl Papiertaschentücher als auch feine Seidentaschentücher Qualitätserzeugnisse sein. Ausschlaggebend ist der Verwendungszweck.

Kurz können wir sagen:

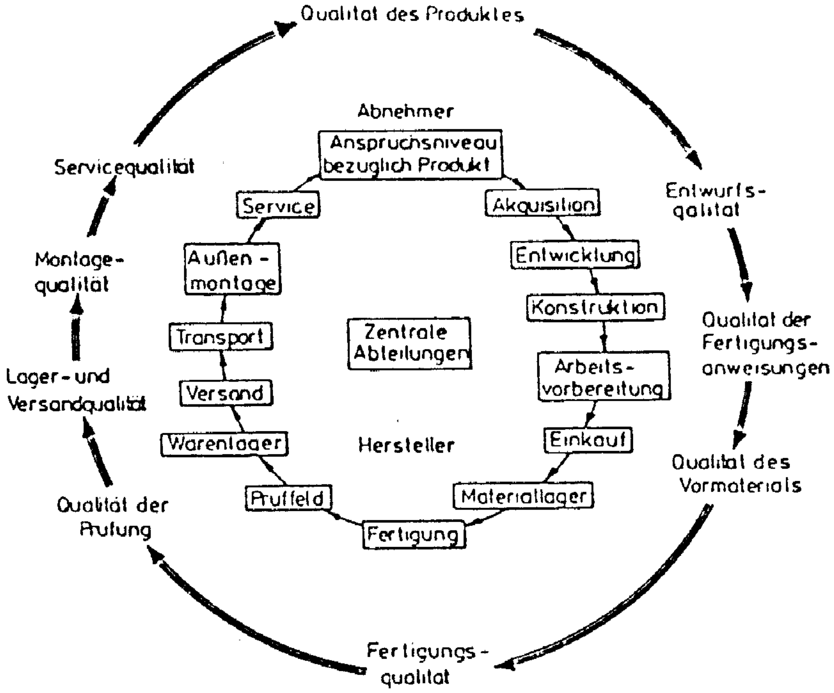
QUALITÄT IST ZWECKEIGNUNG.

In der Praxis teilt man daher den Begriff "Qualität" in die "Planungsqualität" (Festlegung von sinnvollen Sollwerten) und in die "Ausführungsqualität" (Übereinstimmung der Istwerte mit den Sollwerten).

[1] ÖVQ - Österreichische Vereinigung für Qualitätssicherung
[2] Siehe nächste Seite

Aus der Definition des Begriffes "Qualität" ergibt sich, daß für die Qualitätssicherung nicht eine einzelne Abteilung, sondern alle Abteilungen und Mitarbeiter eines Betriebs verantwortlich sind.

Die folgende Abbildung zeigt den sogenannten Qualitätskreis, in dem die wichtigsten Stationen der Qualitätssicherung eines Betriebs eingezeichnet sind.



Der Kunde bestimmt mit seinen Wünschen die Erfordernisse an ein Produkt. Es ist Aufgabe der Akquisition, diese Kundenwünsche möglichst genau zu erfassen und in einem Pflichtenheft schriftlich festzuhalten. Bei Serienprodukten müssen die Kundenwünsche durch Marktanalysen ermittelt werden.

Das Ziel der Entwicklung ist die Erfüllung der Kundenwünsche. Darüber hinaus müssen Kosten, der Stand der Technik, gesetzliche Vorschriften, Sicherheitsbestimmungen und Normen berücksichtigt werden.
Parallel zur Entwicklung des Produkts, muß die Prüfung der einzelnen Qualitätsmerkmale mitentwickelt werden. Dazu kann es notwendig sein, daß Prüfstellen im Gerät oder spezielle Prümittel konstruiert werden.

Die Konstruktion muß ständig geprüft werden. Ein Konstruktionsfehler kann in diesem Stadium mit geringem Kostenaufwand beseitigt werden. Wird er jedoch erst während der Fertigunng entdeckt, so verursacht er hohe Kosten.
Ein Produkt soll so konstruiert werden, daß die Fehleranfälligkeit möglichst gering ist. Das muß unter anderem bei der Wahl der Ausgangsmaterialien berücksichtigt werden.

In der Arbeitsvorbereitung können durch die Wahl der geeigneten Fertigungsmittel und -Methoden, sowie durch die Festlegung einer sinnvollen Reihenfolge der einzelnen Arbeitsgänge Fehler während der Fertigung vermieden werden.
Andereseits verursachen Fehler in einer Fertigungsanweisung hohe Kosten und müssen daher vermieden werden.

Bei der Eigangskontrolle muß die Qualität der angelieferten Ware überprüft werden.

Das Materiallager muß geeignet überprüft werden, damit nur "gutes" Material im Fertigungsprozeß verwendet wird.

Die Qualitätssicherung während und nach der Fertigung ist der traditionelle Teil der Qualitätssicherung.
Es genügt jedoch fast nie, erst das fertige Produkt zu prüfen. Da ein Fehler umso größere Kosten verursacht, je später er entdeckt wird, ist es günstig, möglichst nach jedem Arbeitsgang zu prüfen. Dabei spielen die "frühen" Prüfungen eine besonders wichtige Rolle.
Durch eine deutliche Kennzeichnung von Fehlern oder fehlerhaften Einheiten soll eine Verwechslung mit fehlerfreien Produkten vermieden werden.

Die Prüfung selbst muß auch einer Prüfung unterliegen. Besonders wichtig ist die regelmäßige Eichung und die Kennzeicnung der geeichten Prüfmittel.
Oft ist es möglich, durch Verbesserung der Prüfmittel und der Arbeitsbedingungen am Prüfplatz Fehlprüfungen zu vermeiden.

Die Qualitätssicherung im Warenlager soll sicherstellen, daß die fertigen Produkte bis zur Auslieferung keinen Schaden erleiden.

Beim Versand und Transport spielt die Wahl der Verpackungsmittel eine große Rolle. Durch Fallversuche oder Versuche auf dem Rütteltisch kann der Transport simuliert und die Verpackung auf ihre Tauglichkeit überprüft werden.

Bei der Außenmontage muß auf die lokalen Gegebenheiten Rücksicht genommen werden.

Damit ist das Produkt beim Kunden.
Die Qualitätssicherung ist damit aber noch nicht zu Ende:
Große Bedeutung kommt der Qualitätssicherung im Servicebereich zu.
Die Kundenwünsche schließen fast immer auch die Serviceleistungen mit ein. Neben der freundlichen und prompten Durchführung von diesbezüglichen Leistungen ist etwa die Bereithaltung einer genügend großen Zahl von Ersatzteilen wichtig.
Für die Firma ist das Service die einfachste Gelegenheit mit den Anwendern des Produkts in Kontakt zu treten. Durch Rückmeldungen des Seviceteams können Schwachstellen des Produktes unter bestimmten Anwendungsbedingungen erkannt und Maßnahmen zu deren Beseitigung ergriffen werden.Daraus ist zu ersehen, daß die Rückmeldung von Wünschen und Beschwerden der Kunden besonders wichtig ist.
Der Vertrieb hat sich bemüht die Kundenwünsche zu erfassen, die übrigen Stationen im Qualitätskreis haben sich bemüht, die Kundenwünsche in die Realität umzusetzen. Beim Sevice schließt sich nun der Kreis: Jetzt zeigt sich ob der Kunde mit dem Produkt zufrieden ist. Durch die Rückmeldung vom Anwender ist es unter Umständen notwendig, die Erfordernisse an das Produktes abzuändern, um die neuen Kundenwünsche zu erfüllen.

Wir sehen: Qualitätssicherung beginnt beim Kunden und endet beim Kunden. Er legt durch seine Wünsche die Anforderungen an ein Produkt fest. Es ist nicht Aufgabe eines Betriebes maximale Qualität zu produzieren. Das Ziel ist, jene optimale Qualität zu erzeugen, die der Kunde wünscht und auch bereit ist zu bezahlen.

Außerdem soll durch die Abhandlung des Qualitätskreises klar geworden sein, daß die Qualitätssicherung nicht das Finden, sondern das Vermeiden von Fehlern zum Ziel hat.

Im weiteren wollen wir uns mit einem Teilaspekt der Qualitätssicherung befassen, der Zuverlässigkeitsprüfung.

Unter Zuverlässigkeit versteht man die Qualität unter vorgegeben Anwendungsbedingungen während oder nach einer vorgegeben Zeit.

Vereinfacht kann man sagen:
Qualität ist die Zweckeignung zum Zeitpunkt der Prüfung.
Zuverlässigkeit ist hingegen die Zweckeignung zu einem bestimmten Zeitpunkt nach der Inbetriebnahme.

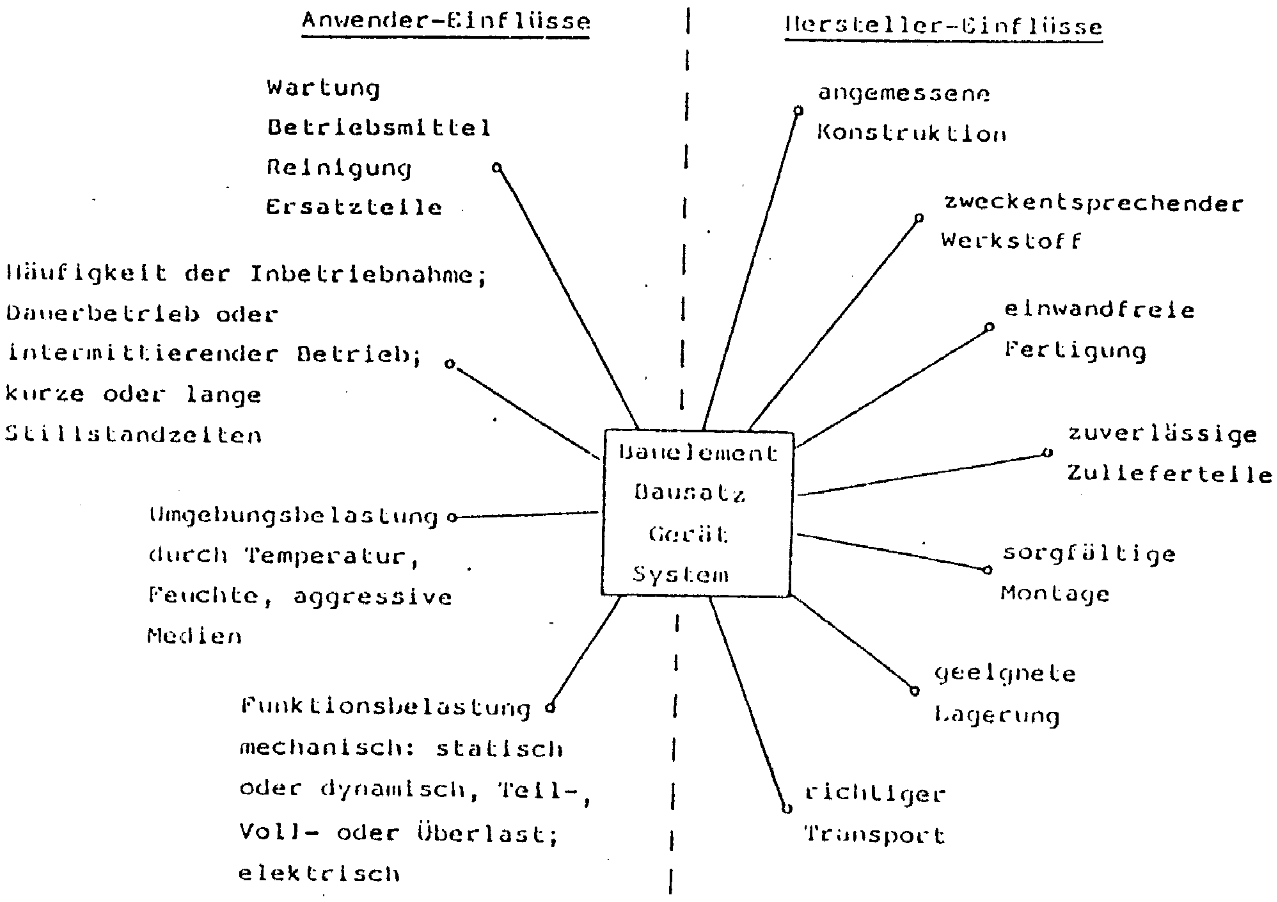
Kurz: ZUVERLASSIGKEIT IST QUALITAT AUF ZEIT.

Wir bezeichnen ein Produkt als zuverlässig, wenn es lange Zeit funktioniert, bzw. wenn es selten repariert werden muß.

In der Praxis sind in diesem Zusammenhang die Größen
MTTF (mean time to failure), das ist die mittlere Zeitspanne bis zum Ausfall bei nicht reparablen Produkten, und
MTBF (mean time between failures), das ist die mittlere Zeitspanne zwischen zwei Ausfällen bei reparablen Produkten,
als Maß für die Zuverlässigkeit üblich.

Unter der Lebensdauer eines Produktes versteht man die Zeitspanne vom Nutzungsbeginn bis zum Ausfall, bei dem eine Reparatur technisch nicht mehr möglich, oder wirtschaftlich nicht mehr sinnvoll ist.

Das Ausfallsverhalten wird sowohl vom Hersteller als auch vom Anwender eines Produkts beeinflußt. Die folgende Abbildung zeigt eine grobe übersicht der verschiedenen Einflußgrößen:



Angaben über die Lebensdauer eines Produktes, bzw. die Zeitspanne zwischen Reparaturen sind unter anderem wichtig für Garantieversprechen, die Planung und Organisation des Instandhaltungsdienstes und die Bereitstellung von Ersatzteilen.

Wegen der vielen Einflußgrößen, die nicht hundertprozentig konstant gehalten werden können, ist die Lebensdauer nicht für alle Produkte einer Charge[1] gleich groß. Die Lebensdauer eines Produkts gehorcht einer statistischen Gesetzmäßigkeit.

Ein weiteres Problem besteht darin, daß bei der Zuverlässigkeitsprüfung die Produkte zerstört werden. Wenn man z.B. prüfen will, ob eine Charge von Glühbirnen die garantierte Lebensdauer erfüllt, so ist es nicht möglich, alle Glühbirnen so lange leuchten zu lassen, bis sie ausfallen, und die entsprechenden Zeiten zu stoppen, um danach zu entscheiden, ob es eine gute Charge war oder nicht.

Die Zuverlässigkeitsprüfung erfolgt daher immer auf Stichprobenbasis. Statistik ist hier erforderlich.

-----oooooOooooo-----

Wir wollen das Ausfallsverhalten an einem konkreten Beispiel studieren. Dazu betrachten wir eine Stichprobe von 600 soeben gefertigten, einwandfrei funktionierenden Transistoren.
Die funktionierenden Transistoren sind in den folgenden Abbildungen durch volle Kreise dargestellt.

In regelmäßigen Zeitabständen wird diese Stichprobe geprüft und die Anzahl der noch funktionierenden Bauteile ermittelt.
Die nicht mehr funktionierenden Transistoren sind in den folgenden Abbildungen durch Kreislinien dargestellt.

Die folgenden 7 Abbildungen auf den nächsten Seiten zeigen die ersten 30 Prüfergebnisse. Links steht jeweils die Anzahl der noch funktionierenden Bauteile.

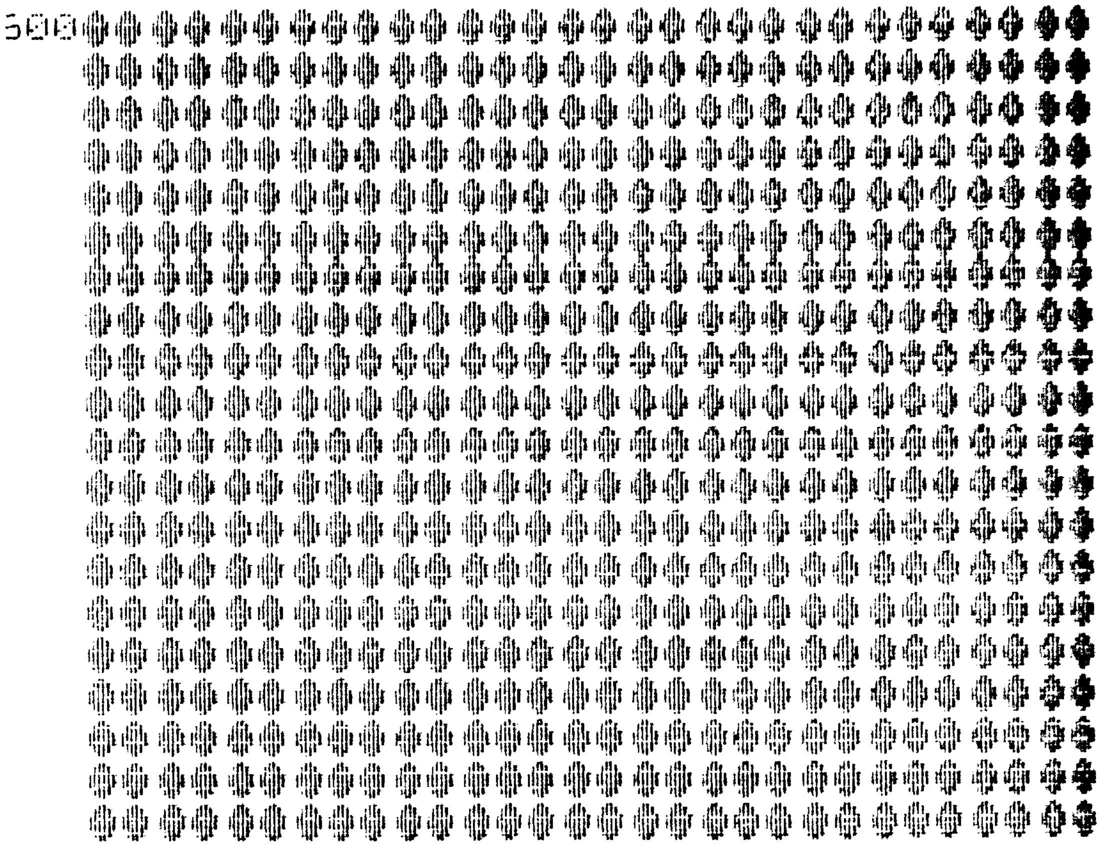
Es fällt auf, daß die Anzahl der funktionierenden Transistoren zuerst rasch und dann immer langsamer abnimmt.

Die Anzahl der zu einem bestimmten Zeitpunkt t funktionierenden Bauteile (volle Kreise) wird mit B(t) bezeichnet und heißt Bestand zum Zeitpunkt t.
$B(t_0)$ heißt der Anfangsbestand . Dabei ist t_0 der Zeitpunkt, in dem die Nutzung beginnt.

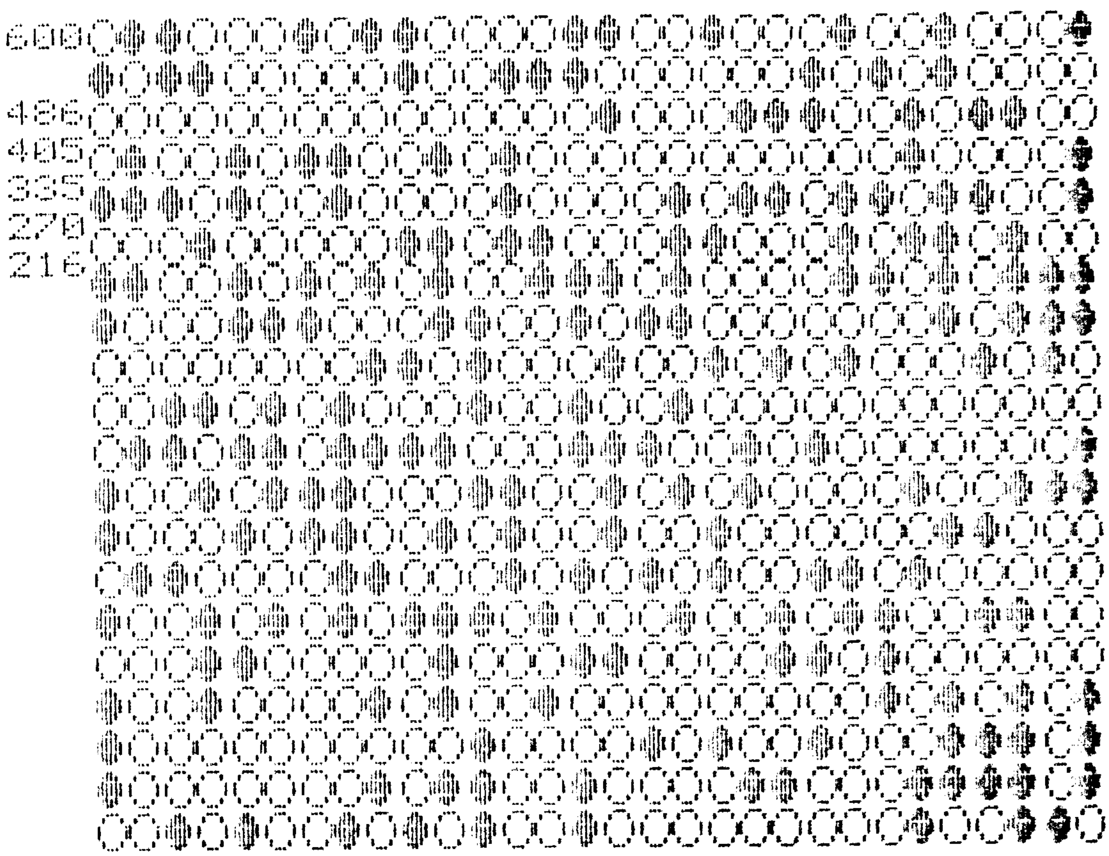
Für viele Zwecke ist es günstiger, anstelle der Anzahl den Anteil der zu einem bestimmten Zeitpunkt t funktionierenden Bauteile zu betrachten. Diese Größe heißt relativer Bestand zum Zeitpunkt t und wird mit $\hat{R}(t)$ bezeichnet. ...[2]

Es gilt: $$\hat{R}(t) = B(t) \,/\, B(t_0)$$

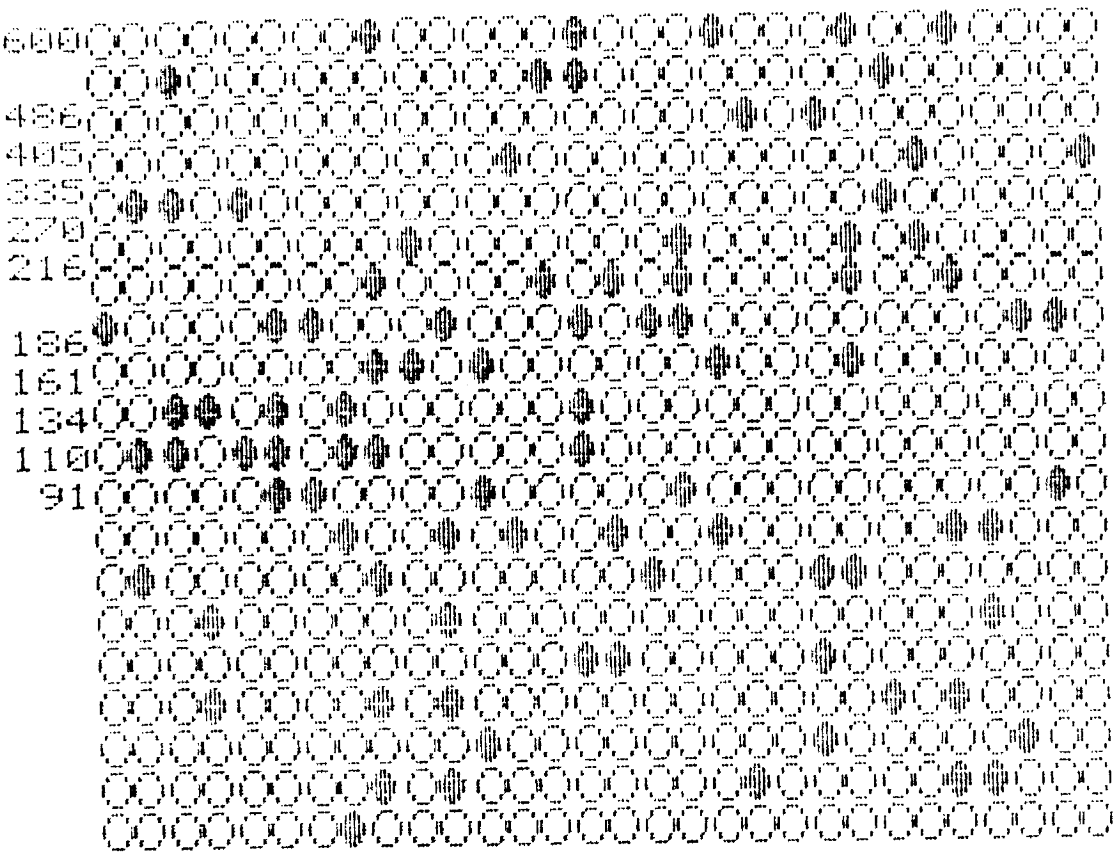
[1] Alle Produkte, die unter gleichen Bedingungen gefertigt wurden
[2] $\hat{R}(t)$ wird "R Dach von t" gesprochen.



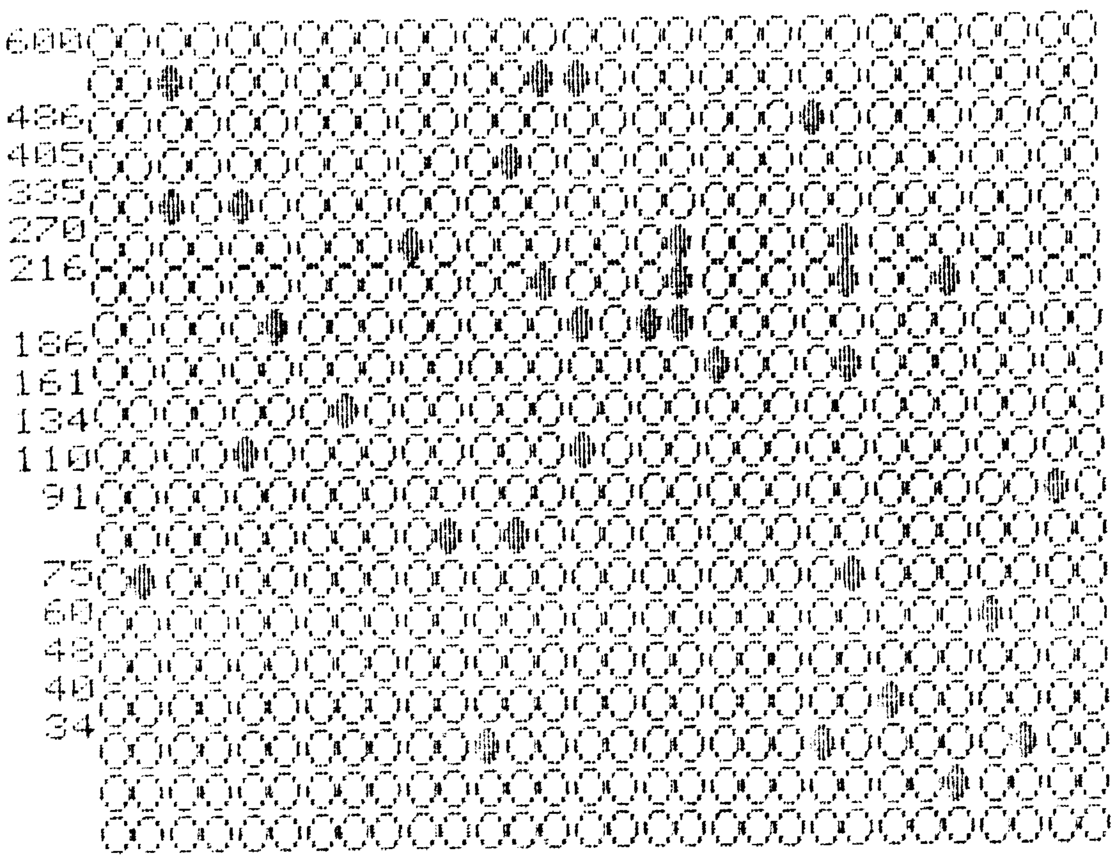
Anfangsbestand:
Bestand zum Zeitpunkt t = 0



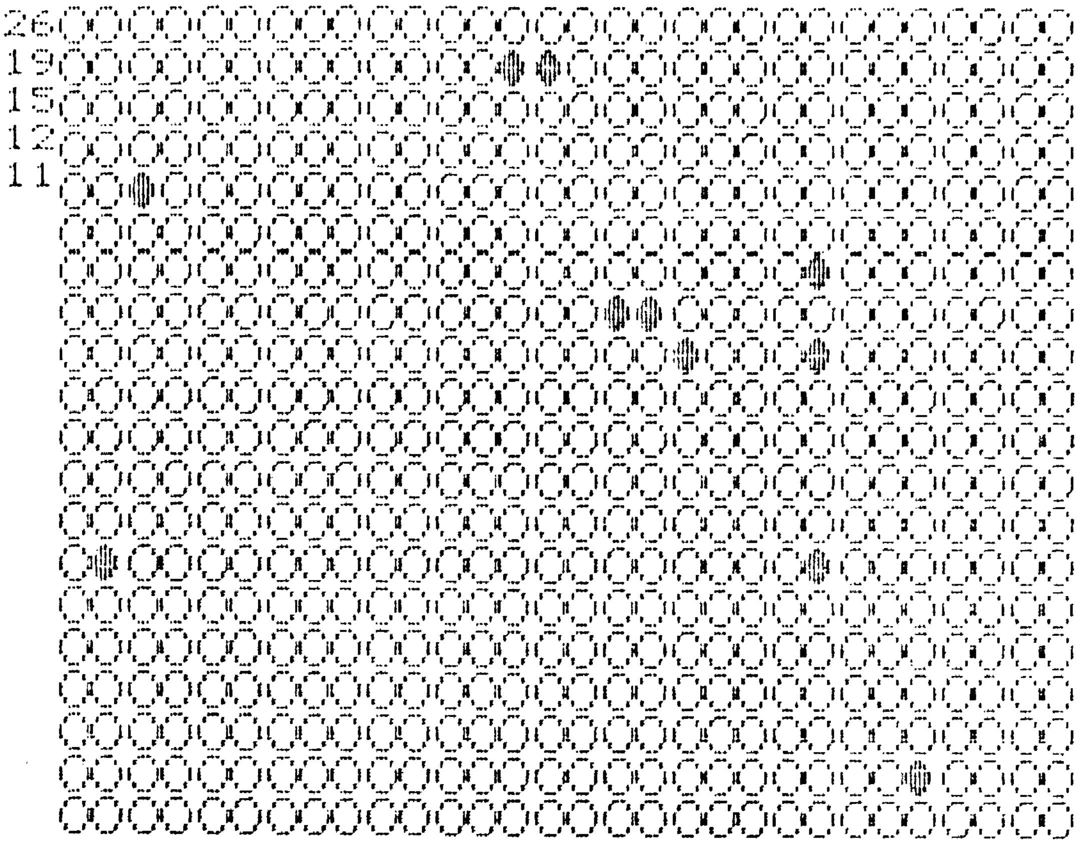
Bestand zum Zeitpunkt t = 5



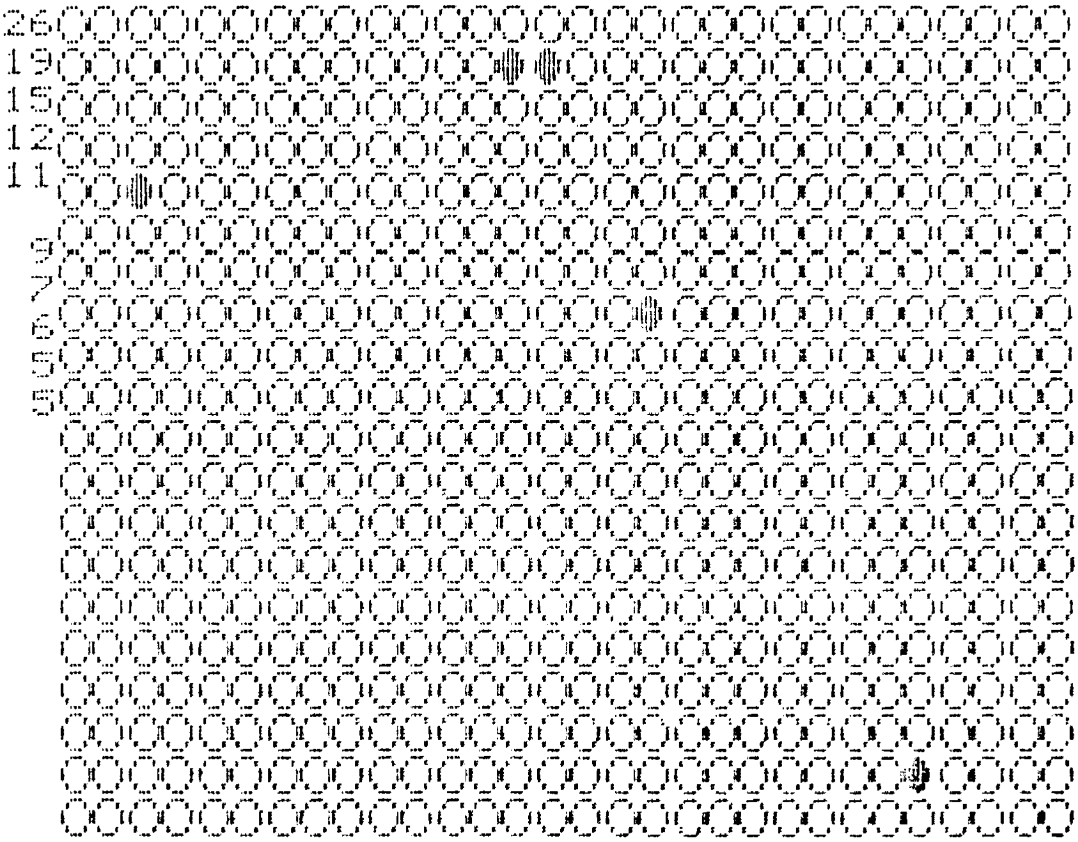
Bestand zum Zeitpunkt t = 10



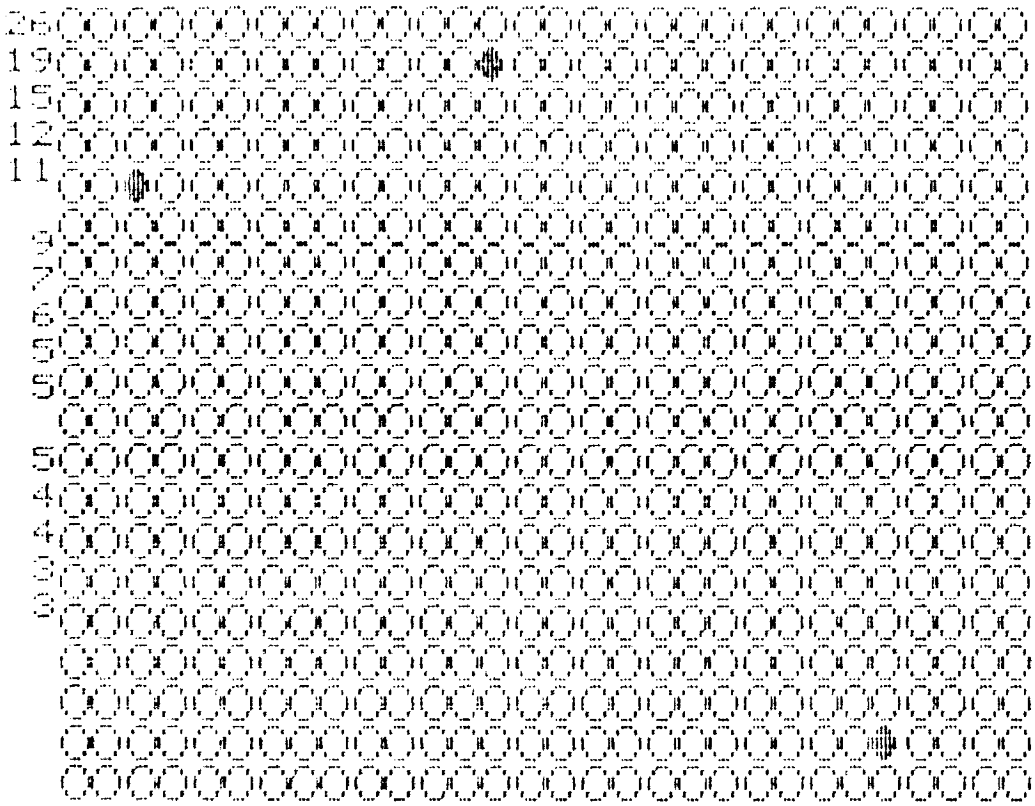
Bestand zum Zeitpunkt t = 15



Bestand zum Zeitpunkt t = 20



Bestand zum Zeitpunkt t = 25



Bestand zum Zeitpunkt t = 30

Die Anzahl der Bauteile, die zu einem bestimmten Zeitpunkt t nicht mehr funktionieren (Kreislinien), wird mit A(t) bezeichnet und heißt <u>Ausfallshäufigkeitssumme</u>.

Es gilt:

$$A(t) = B(t) - B(t_0)$$
$$A(t_0) = 0$$

Der Anteil der Bauteile, die zu einem bestimmten Zeitpunkt t nicht mehr funktionieren, wird mit $\hat{G}(t)$ bezeichnet und heißt <u>relative Ausfallshäufigkeitssumme</u>.

Es gilt:

$$\hat{G}(t) = A(t) / B(t_0) = (B(t_0) - B(t)) / B(t_0)$$
$$= 1 - \hat{R}(t)$$

Für das Studium des Ausfallsverhaltens ist es weiters interessant, die Anzahl der Bauteile zu betrachten, die zwischen zwei Prüfungen, d.h. im Zeitintervall Δt ausgefallen sind. Diese Größe heißt <u>Ausfallshäufigkeit</u> und wird mit a(t) bezeichnet.

Es gilt:

$$a(t) = B(t) - B(t+\Delta t) = -\Delta B(t)$$
$$= A(t+\Delta t) - A(t) = \Delta A(t)$$

Wir wollen nun die Ausfallshäufigkeit in Abhängigkeit vom Anfangsbestand, die <u>relative Ausfallshäufigkeit</u>, betrachten.

Es gilt:

$$a(t) / B(t_0) = -\Delta B(t) / B(t_0) = -\Delta \hat{R}(t)$$
$$= \Delta A(t) / B(t_0) = \Delta \hat{G}(t)$$

Die Ausfallshäufigkeit hängt auch wesentlich von der Größe des Prüfintervalls Δt ab. Es ist daher sinnvoll, die Ausfallshäufigkeit nicht nur durch den Anfangsbestand, sondern auch durch die Zeitspanne Δt zu dividieren.
Den Anteil der ausgefallenen Bauteile pro Zeiteinheit bezeichnet man mit g(t). Er heißt <u>Ausfallshäufigkeitsdichte</u>.

Es gilt:

$$\begin{aligned}\hat{g}(t) &= a(t) \,/\, (B(t_0)*\Delta t) \\ &= -\Delta B(t) \,/\, (B(t_0)*\Delta t) = -\Delta\hat{R}(t) \,/\, \Delta t \\ &= \Delta A(t) \,/\, (B(t_0)*\Delta t) = \Delta\hat{G}(t) \,/\, \Delta t\end{aligned}$$

Die Ausfallshäufigkeitdichte bezieht sich auf den Anfangsbestand. Es ist jedoch auch interessant, die Ausfallshäufigkeit auf den Bestand zum Zeitpunkt t zu beziehen. Der Anteil der noch funktionierenden Bauteile, die innerhalb der Zeitspanne Δt ausfallen werden, heißt <u>Ausfallsquote</u> und wird mit $\hat{\lambda}(t)$ bezeichnet.

Es gilt:

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}(t) &= a(t) \,/\, (B(t)*\Delta t) \\ &= -\Delta B(t) \,/\, (B(t)*\Delta t) = -\Delta\hat{R}(t) \,/\, (\hat{R}(t)*\Delta t) \\ &= \Delta A(t) \,/\, (B(t)*\Delta t) = \hat{g}(t) \,/\, \hat{R}(t)\end{aligned}$$

In der Tabelle auf der nächsten Seite sind diese Größen für unser Beispiel der Stichprobe von 600 Transistoren ausgerechnet. In der letzten Spalte ist die theoretische Vorhersage G(t) für die relative Ausfallshäufigkeitssumme $\hat{G}(t)$ ausgerechnet.

Wir erkennen, daß der Bestand B(t) und damit auch der relative Bestand $\hat{R}(t)$, zuerst rasch und dann immer langsamer abnimmt.
Entsprechend nehmen die Ausfallshäufigkeitssumme A(t) und die relative Ausfallshäufigkeitssumme $\hat{G}(t)$ zuerst rasch und dann immer langsamer zu.

Die Ausfallshäufigkeit a(t) und die Ausfallshäufigkeitsdichte $\hat{g}(t)$ nehmen zuerst rasch und dann immer langsamer ab. Das ist nicht verwunderlich: Je weniger Bauteile noch funktionieren, desto weniger können pro Prüfintervall t ausfallen.

Interessant ist, daß die Ausfallsquote $\hat{\lambda}(t)$ über den gesamten Versuchsverlauf ungefähr konstant ist und 0.2 beträgt. Für t > 20 unterliegt $\hat{\lambda}(t)$ jedoch recht großen unsystematischen Schwankungen.

-----oooooOooooo-----

Nachdem wir uns mit den Größen der Stichproben bei Zuverlässigkeitsprüfungen auseinandergesetzt haben, wollen wir nun daran gehen, entsprechende Größen für die statistische Grundgesamtheit, das ist bei uns die gesamte Fertigung, einzuführen.

Wir bedienen uns des <u>statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs</u>:
Die Wahrscheinlichkeit P(E) für das Eintreten eines Ereignisses E entspricht der relativen Häufigkeit h(E), mit der das Ereignis E bei einer hinreichend großen Anzahl n von Versuchen eintritt.

Mit Hilfe der Mathematik formulieren wir:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} h(E)$$

t	B(t)	$\hat{R}(t)$	a(t)	$\hat{g}(t)$	$\hat{\lambda}(t)$	A(t)	$\hat{G}(t)$	G(t)
0	600	1				0	0	0
			114	0.190	0.210			
1	486	0.810				114	0.190	0.181
			81	0.135	0.182			
2	405	0.675				195	0.325	0.330
			70	0.117	0.189			
3	335	0.558				265	0.442	0.451
			65	0.108	0.215			
4	270	0.450				330	0.550	0.551
			54	0.090	0.222			
5	216	0.360				384	0.640	0.632
			30	0.050	0.149			
6	186	0.310				414	0.690	0.699
			25	0.042	0.144			
7	161	0.268				439	0.732	0.753
			27	0.045	0.183			
8	134	0.223				466	0.777	0.798
			24	0.040	0.197			
9	110	0.183				490	0.817	0.835
			19	0.032	0.189			
10	91	0.152				509	0.848	0.865
			16	0.027	0.193			
11	75	0.125				525	0.875	0.889
			15	0.025	0.222			
12	60	0.100				540	0.900	0.909
			12	0.020	0.222			
13	48	0.080				552	0.920	0.926
			8	0.013	0.182			
14	40	0.067				560	0.933	0.939
			6	0.010	0.162			
15	34	0.057				566	0.943	0.950
			8	0.013	0.267			
16	26	0.043				574	0.957	0.959
			7	0.012	0.311			
17	19	0.032				581	0.968	0.967
			4	0.007	0.235			
18	15	0.025				585	0.975	0.973
			3	0.005	0.222			
19	12	0.020				588	0.980	0.978
			1	0.002	0.087			
20	11	0.018				589	0.982	0.982
			2	0.003	0.200			
21	9	0.015				591	0.985	0.985
			2	0.003	0.250			
22	7	0.012				593	0.988	0.988
			1	0.002	0.154			
23	6	0.010				594	0.990	0.990
			1	0.002	0.182			
24	5	0.008				595	0.992	0.992
			0	0.000	0.000			
25	5	0.008				595	0.992	0.993
			0	0.000	0.000			
26	5	0.008				595	0.992	0.994
			1	0.002	0.222			
27	4	0.007				596	0.993	0.995
			0	0.000	0.000			
28	4	0.007				596	0.993	0.996
			1	0.002	0.286			
29	3	0.005				597	0.995	0.997
			0	0.000	0.000			
30	3	0.005				597	0.995	0.998

Wenn ein Ereignis E z.B. in 500 von 10000 Fällen eintritt, beträgt die relative Häufigkeit h(E) 0.05 oder 5 % .
Die Wahrscheinlichkeit P(E) beträgt dann auch ungefähr 0.05 .

Wir verwenden die relative Häufigkeit h(E) aus den 10000 Versuchen als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit P(E).

Wir wollen nun die oben berechneten verschiedenen relativen Häufigkeiten bei der Zuverlässigkeitsprüfung dazu verwenden, um Schätzwerte für die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten zu erhalten.

Der relative Bestand $\hat{R}(t) = B(t) / B(t_0)$, das ist der Anteil der noch funktionierenden Bauteile, ist ein Schätzwert für die Überlebenswahrscheinlichkeit R(t). ...[1]

Wollen wir vorhersagen, wie viele Bauteile zu einem bestimmten Zeitpunkt noch funktionieren werden, so müssen wir die Überlebenswahrscheinlichkeit mit der Anzahl aller Bauteile multiplizieren.

Die relative Ausfallshäufigkeitssumme $\hat{G}(t) = A(t) / B(t_0)$ ist ein Schätzwert für die Ausfallswahrscheinlichkeit G(t).

Es gilt: $G(t) = 1 - R(t)$

Die Ausfallshäufigkeitsdichte $\hat{g}(t) = \Delta G(t) / \Delta t = - \Delta R(t) / \Delta t$ ist ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeitsdichte g(t).

Es gilt: $g(t) = G'(t) = - R'(t)$

Beachten Sie:
Aus den Differenzquotienten der Ausfallshäufigkeitsdichte werden die entsprechenden Differentialquotienten der Wahrscheinlichkeitsdichte.

Die Ausfallsquote $\hat{\lambda}(t) = - \Delta B(t) / (B(t)*\Delta t)$ ist ein Schätzwert für die Ausfallsrate $\lambda(t) = - B'(t) / B(t)$

Es gilt:
$$\hat{\lambda}(t) = - \Delta \hat{R}(t) / (\hat{R}(t)*\Delta t) = \hat{g}(t) / \hat{R}(t)$$

Analog gilt:
$$\lambda(t) = - R'(t) / R(t) = g(t) / R(t)$$

Die letzte Formel werden wir später zur Berechnnung der Ausfallsrate verwenden.

Mit Hilfe der verschiedenen Formeln für die Ausfallsrate $\lambda(t)$, die wir aus entsprechenden Formeln für die Ausfallsquote $\hat{\lambda}(t)$ ermittelt haben, erhalten wir nun eine Differentialgleichung, die das Ausfallsverhalten von Bauteilen beschreibt:

$$B'(t) = - \lambda(t) * B(t)$$

bzw.

$$R'(t) = - \lambda(t) * R(t)$$

[1] In der Statistik ist es üblich, Schätzwerte mit dem gleichen Buchstaben wie die zu schätzende Größe zu bezeichnen und zusätzlich mit einem ^ zu kennzeichnen.

Den wichtigsten Spezialfall erhalten wir, wenn wir die Ausfallsrate $\lambda(t)$ als konstant voraussetzen.

In diesem Fall ist die Änderung des Bestandes zum Bestand und die Änderung der Überlebenswahrscheinlichkeit zur Überlebenswahrscheinlichkeit direkt proportional. ...[1]

In diesem Fall erhalten wir als Lösung für die Differentialgleichung:

$$B(t) = B(t_0) * \exp(-\lambda * t)$$

bzw.

$$R(t) = \exp(-\lambda * t)$$

Wir sehen aus der Gleichung, daß λ die Dimension Zeit^{-1} hat.
In der Praxis wird daher oft der Kehrwert T von λ angegeben, der die Dimension Zeit hat und charakteristische Lebensdauer heißt.

Es gilt: $$T = 1 / \lambda$$

Wir erhalten nun: $$R(t) = \exp(-t / T)$$

Wenn $\lambda(t)$ konstant ist und daher die obige Formel die Überlebenswahrscheinlichkeit beschreibt, sagen wir:
Die Lebensdauer der Bauteile ist exponitialverteilt.

Die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung ist die Ausfallswahrscheinlichkeit G(t).

Es gilt:
$$G(t) = 1 - \exp(-\lambda * t)$$
$$= 1 - \exp(-t / T)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Exponentialverteilung ist dementsprechend:

$$g(t) = G'(t) = \lambda * \exp(-\lambda * t)$$
$$= 1/T * \exp(-t / T)$$

Für $t = T = 1 / \lambda$ erhalten wir:

$$R(t) = \exp(-T / T) = 1 / e = 0.3679$$
$$G(t) = 1 - R(t) = 1 - 1 / e = 0.6321$$

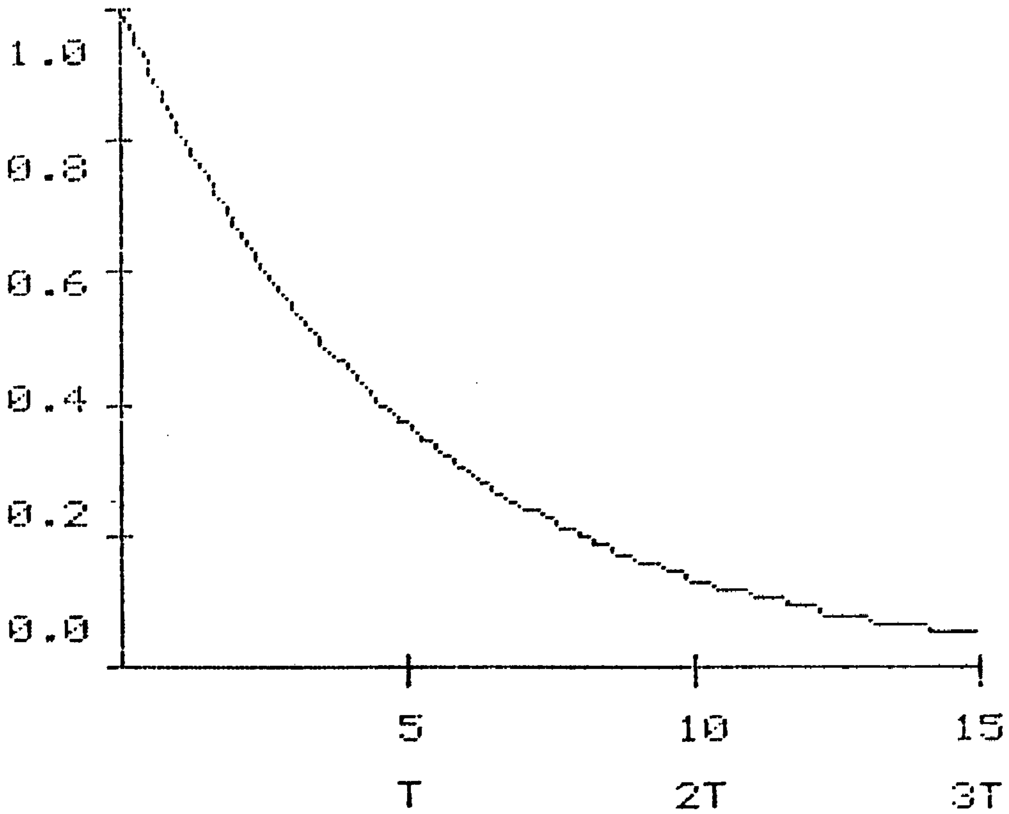
Die charakteristische Lebensdauer T ist jene Zeit, nach der die Überlebenswahrscheinlichkeit nur mehr 1/e beträgt, das heißt der Bestand nur mehr ein e-tel des Anfangbestands ist.

Die folgenden Abbildungen zeigen die Überlebenswahrscheinlichkeit R(t), die Ausfallswahrscheinlichkeit G(t), die Wahrscheinlichkeitsdichte g(t) und die Ausfallsrate $\lambda(t)$ der Exponentialverteilung mit $\lambda = 0.2$.

[1] Beachten Sie die Analogie zum radioaktiven Zerfall!

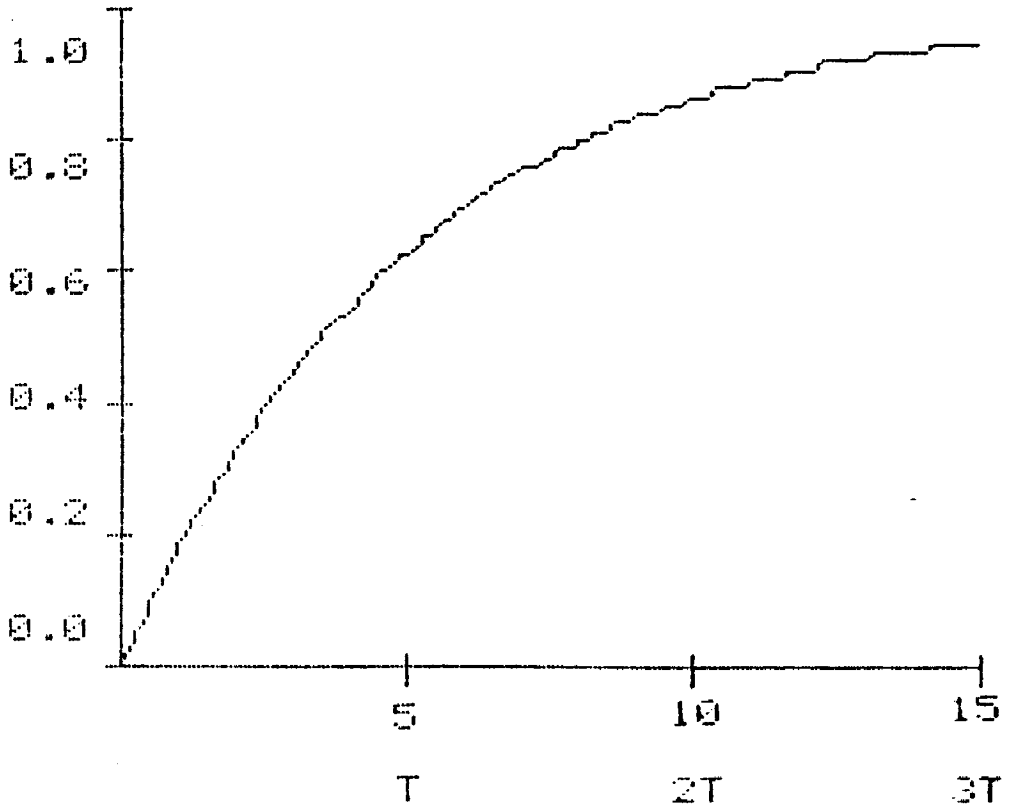
überlebenswahrscheinlichkeit

$R(t) = \exp(-\lambda * t) = \exp(-t/T)$



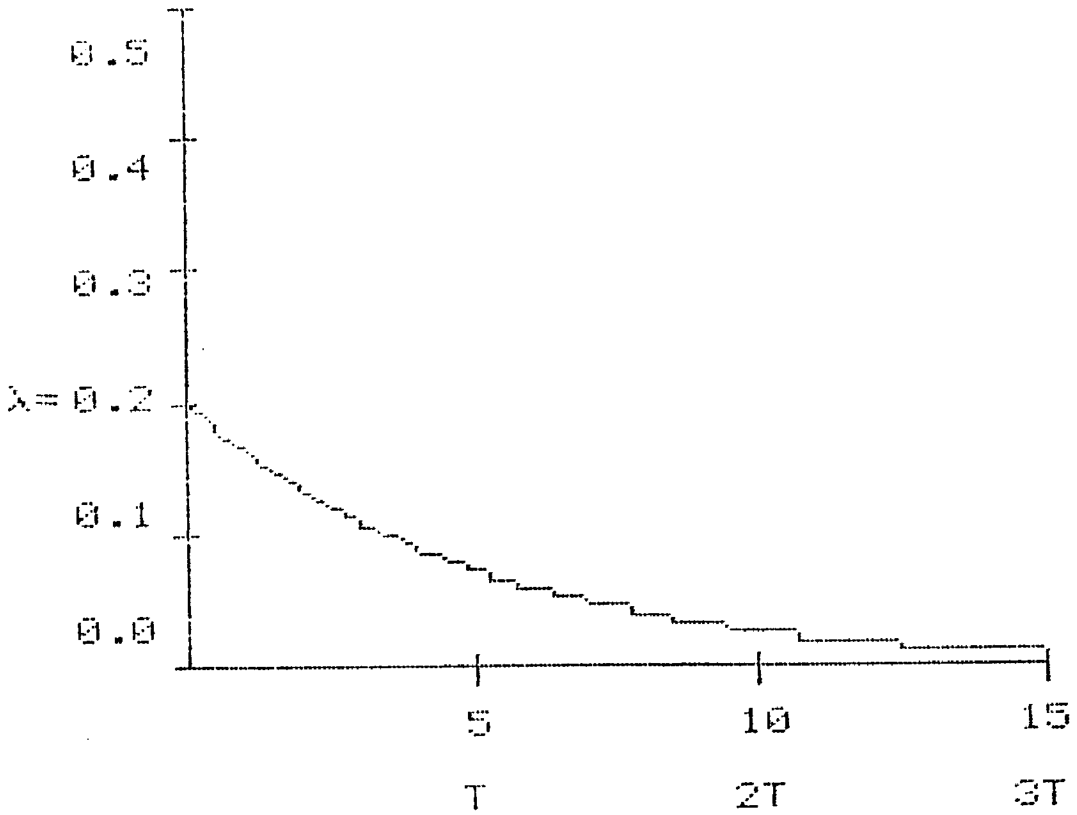
Ausfallswahrscheinlichkeit =
Verteilungsfunktion

$G(t) = 1 - R(t)$
$\quad = 1 - \exp(-\lambda * t) = 1 - \exp(-t/T)$



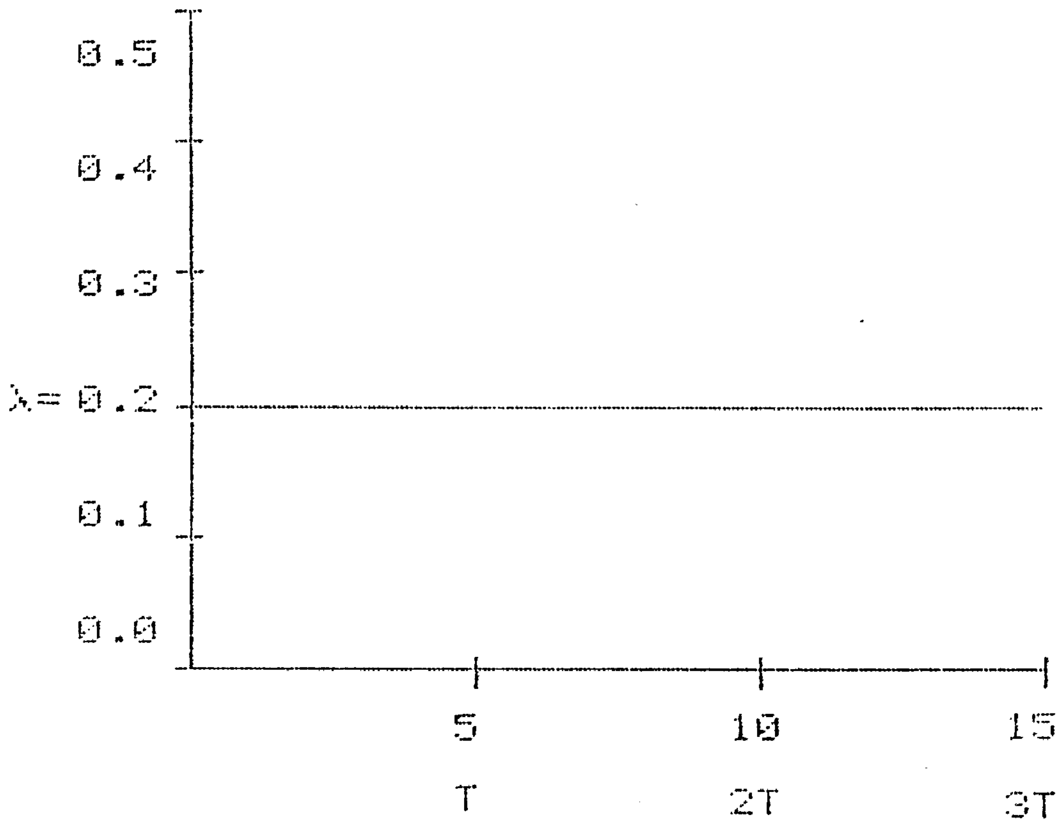
Wahrscheinlichkeitsdichte

g(t) = G'(t) = - R'(t)
= λ*exp(-λ*t) = 1/T*exp(-t/T)



Ausfallsrate

λ(t) = λ = 1 / T = konstant



Wir wollen nun für die Exponentialverteilung den Mittelwert μ und die Standardabweichung σ berechnen.

Für eine stetige Verteilung der Zufallsvariablen x mit der Wahrscheinlichkeitsdichte g(x) gilt allgemein:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x * g(x)\, dx$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 * g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 * g(x)\, dx - \mu^2$$

Für die Exponentialverteilung erhalten wir:

$$\mu = \int_0^{\infty} t * g(t)\, dt = \int_0^{\infty} t * \lambda * \exp(-\lambda * t)\, dt$$

$$= -t * \exp(-\lambda * t)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} - \exp(-\lambda * t)\, dt$$

$$= 0 - 1/\lambda * \exp(-\lambda * t)\Big|_0^{\infty} = 1/\lambda = T$$

Bei der Exponentialverteilung ist die charakteristische Lebensdauer T gleichzeitig die mittlere Lebensdauer.

T ist jene Größe, die bei irreparablen Teilen MTTF (mean time to failure) und bei reparablen Teilen MTBF (mean time between failures) heißt und in der Praxis beim Vergleich von Bauteilen sehr große Bedeutung hat.

Beachten Sie:
Die Normalverteilung ist symmetrisch, daher ist der Mittelwert gleichzeitig der Zentralwert ("mittlerer Wert") und der Modalwert ("häufigster Wert").
Die Exponentialverteilung ist asymmetrisch, daher gilt beides nicht.
Der Wert der Verteilungsfunktion von T ist nicht 0.5 sondern 0.6321 .
Das Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichte g(t) liegt nicht bei t = T, sondern bei t = 0.

Als nächstes berechnen wir die Varianz σ^2 der Exponentialverteilung:

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} t^2 * g(t)\, dt - \mu^2$$

$$= \int_0^{\infty} t^2 * \lambda * \exp(-\lambda * t)\, dt - T^2$$

$$= -t^2 * \exp(-\lambda * t)\Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} t * \exp(-\lambda * t)\, dt - T^2$$

$$= 0 - 2 * t / \lambda * \exp(-\lambda * t)\Big|_0^{\infty}$$

$$- 2 * \int_0^{\infty} - 1/\lambda * \exp(-\lambda * t)\, dt - T^2$$

$$= 0 + 2/\lambda^2 * \exp(-\lambda * t)\Big|_0^{\infty} - T^2 = 2 * T^2 - T^2$$

$\underline{\sigma^2 = T^2}$ und $\underline{\sigma = T}$

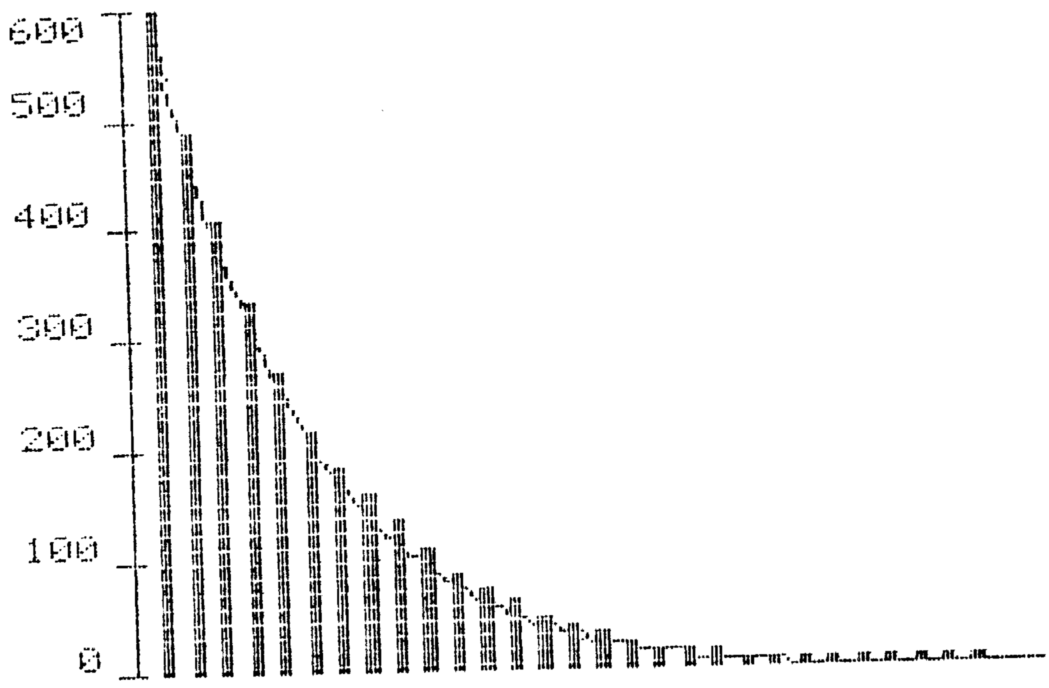
Die charakteristische und mittlere Lebensdauer T ist also gleichzeitig auch die Standardabweichung σ der Exponentialverteilung.

Für unser Beispiel der Stichprobe von 600 Transistoren gilt die Voraussetzung, daß $\lambda(t)$ konstant ist. Die Lebensdauer der Transistoren ist daher exponentialverteilt und zwar mit $\lambda = 0.2$.

Wir wollen nun den Bestand $B(t)$, den relativen Bestand $\hat{R}(t)$, die Ausfallshäufigkeitssumme $A(t)$, die relative Ausfallshäufigkeitssumme $\hat{G}(t)$, die Ausfallshäufigkeit $a(t)$, die Ausfallshäufigkeitsdichte $\hat{g}(t)$ und die Ausfallsquote $\hat{\lambda}(t)$ jeweils in einem Histogramm graphisch darstellen und mit den ensprechenden Größen der Exponentialverteilung vergleichen.

Anzahl der funktionierenden Bauteile
Bestand B(t)

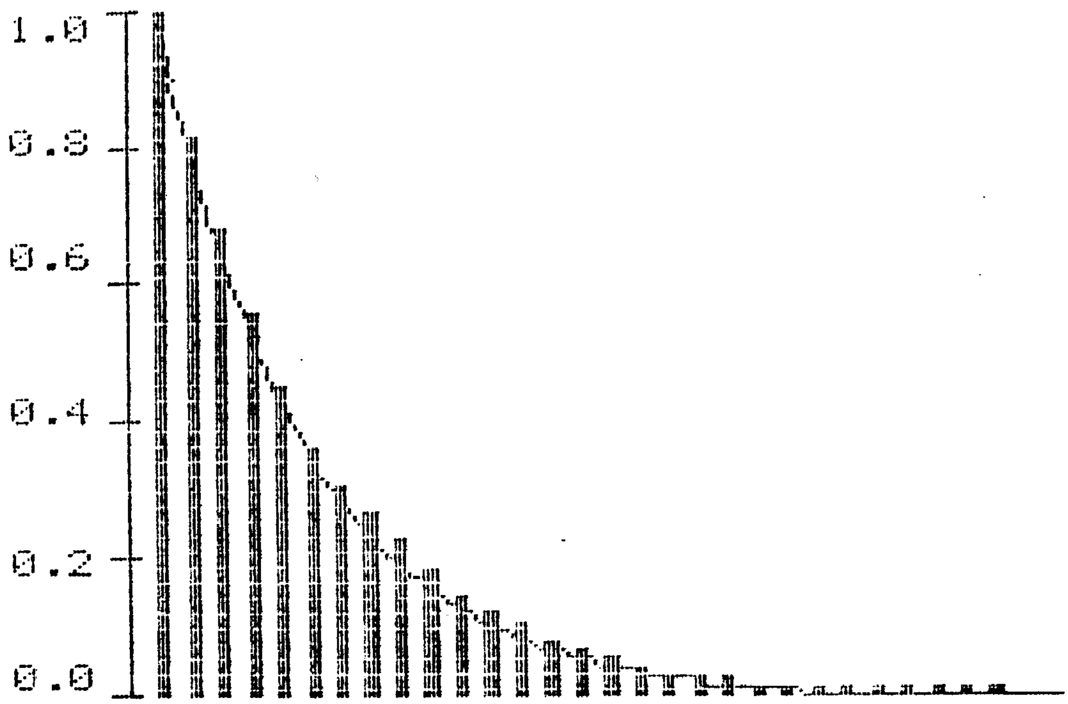
Überlebenswahrscheinlichkeit * B(t0)



Relativer Bestand
Anteil der funktionierenden Bauteile

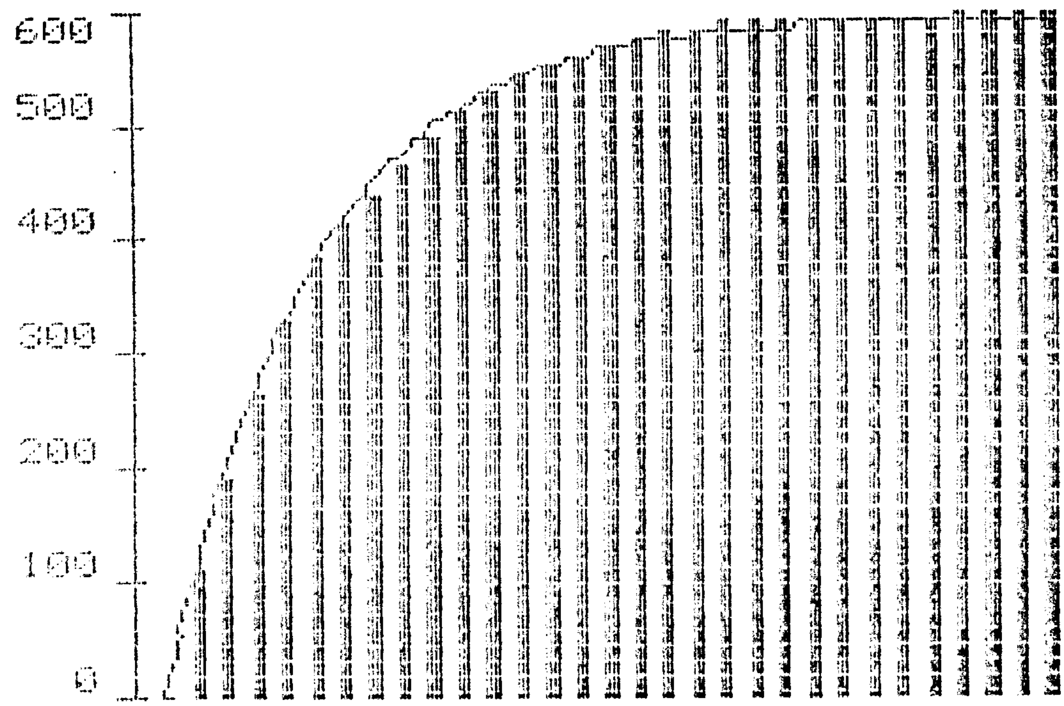
$\hat{R}(t) = B(t) / B(t0)$

Überlebenswahrscheinlichkeit
$R(t) = \exp(-t*\lambda)$ mit $\lambda = 1/T$



Ausfallshäufigkeitssumme
Anzahl der ausgefallenen Bauteile
$A(t) = B(t0) - B(t)$

Ausfallswahrscheinlichkeit * B(t0)

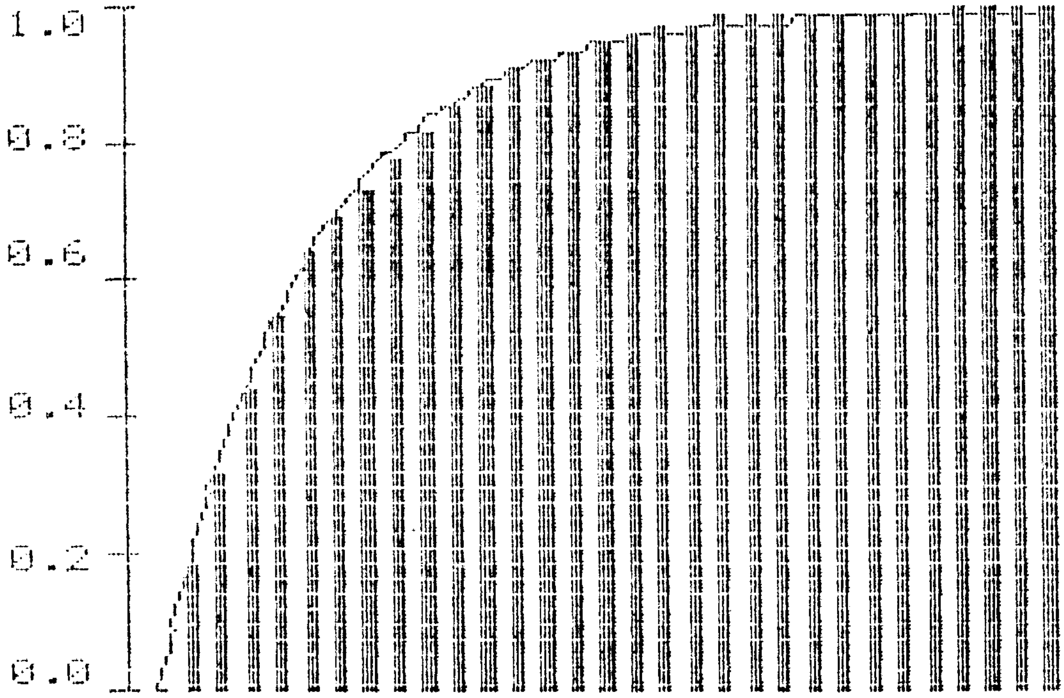


Relative Ausfallshäufigkeitssumme
Anteil der ausgefallenen Bauteile

$\hat{G}(t) = A(t) / B(t0)$
$\quad\;\; = 1 - R\text{^}(t)$

Ausfallswahrscheinlichkeit

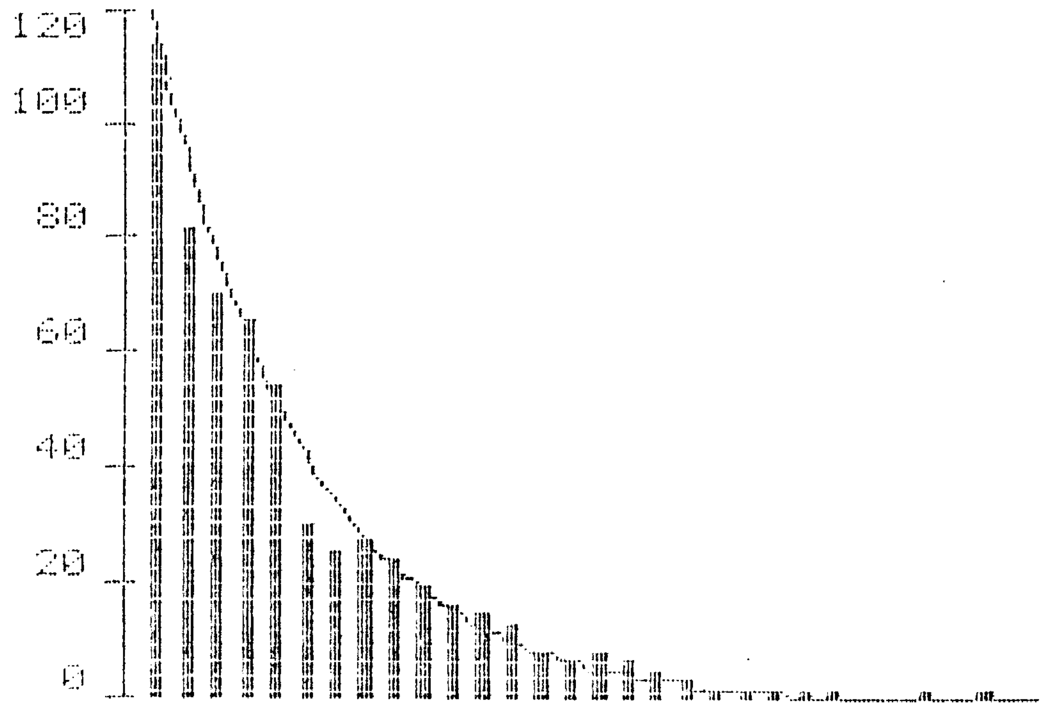
$G(t) = 1 - R(t) = 1 - exp(-t*λ)$



Ausfallshäufigkeit
Anzahl der in dt ausgefallenen Bauteile

$a(t) = B(t) - B(t+1)$
$\quad\;\; = A(t+1) - A(t)$

Wahrscheinlichkeitsdichte * B(t0) * dt

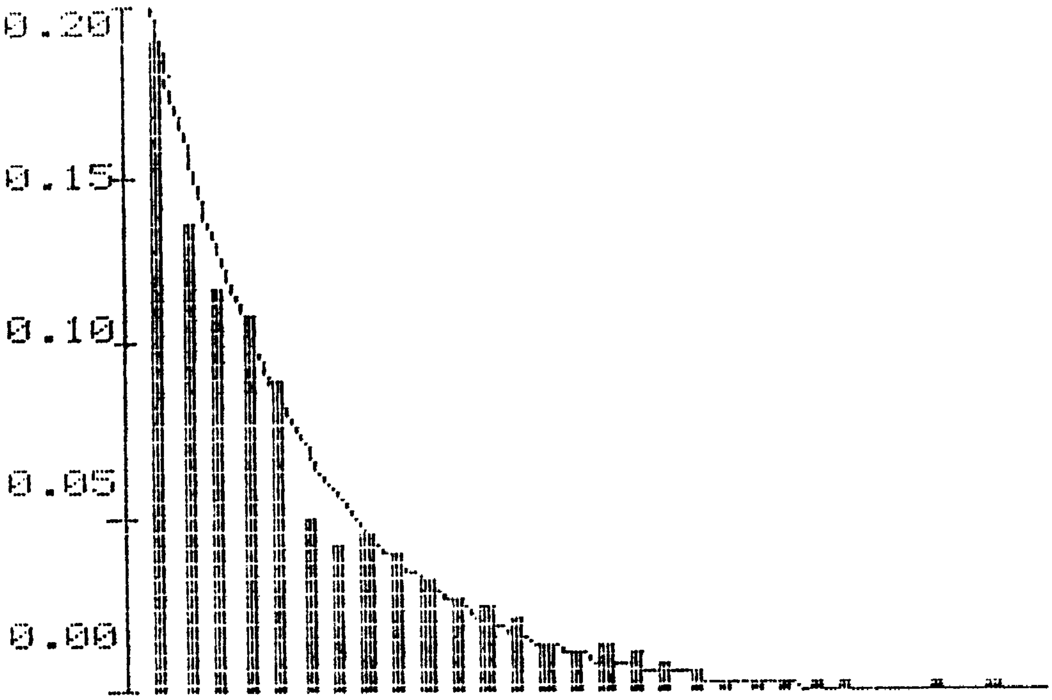


Ausfallshäufigkeitsdichte

$$\hat{g}(t) = (B(t) - B(t+1)) / B(t0) / dt$$
$$= a(t) / B(t0) / dt$$

Wahrscheinlichkeitsdichte

$$g(t) = G'(t) = - R'(t) = \lambda * \exp(-\lambda * t)$$

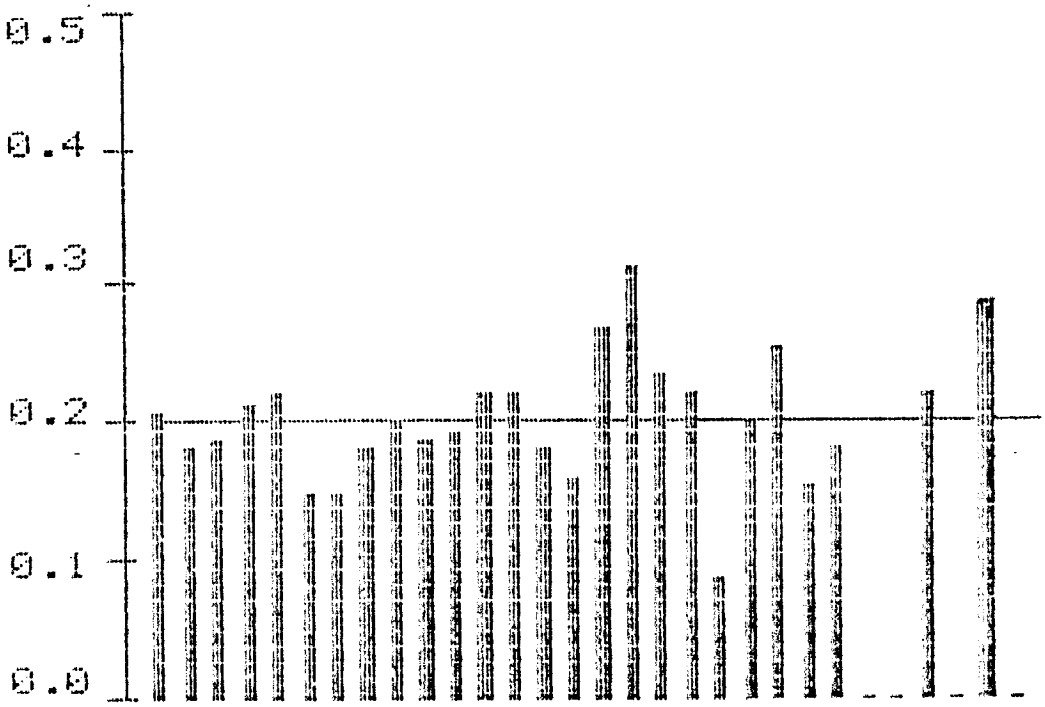


Ausfallsquote

$$\hat{\lambda}(t) = (B(t) - B(t+1)) / B(t) / dt$$
$$= a(t) / B(t) / dt$$

Ausfallsrate

$$\lambda(t) = \lambda = 1/T = \text{konstant}$$



Die Abweichungen zwischen Theorie und Experiment sind beim Bestand, beim relativen Bestand, bei der Ausfallshäufigkeitssumme und bei der relativen Ausfallshäufigkeitssumme recht klein. ...[1]

Bei der Ausfallshäufigkeit, bei der Ausfallshäufigkeitsdichte und bei der Ausfallsquote treten größere Schwankungen auf.
Der allgemeine Trend ist jedoch auch hier gut zu erkennen.

-----oooooOooooo-----

BEISPIELE

1. Beispiel:

Eine Serie von Transistoren hat eine mittlere Lebensdauer von T = 100000 Stunden.
Wie hoch ist der Anteil der Transistoren, die eine Eisatzzeit von 100000 Stunden überleben?
Nehmen Sie als Lebensdauerverteilung die Exponentialverteilung an.

Lösung:

R(t) = exp(- t / T) = exp(- t / 100000 h)
R(100000 h) = exp(- 100000 h / 100000h= exp(-1) = 0.3679

R(100000 h) = 36.79 %

Nach der mittleren Lebensdauer von 100000 Stunden funktionieren noch 36.79 % der Transistoren.

2. Beispiel:

Eine Serie von Transistoren hat eine mittlere Lebensdauer von T = 100000 Stunden.
Welche Einsatzzeit wird von 90 % der Transistoren überlebt?
Nehmen Sie als Lebensdauerverteilung die Exponentialverteilung an.

Lösung:

R(t) = exp(- t / T) = exp(- t / 100000 h)
0.9 = exp(- t / 100000 h)
ln 0.9 = - t / 100000 h
t = - ln 0.9 * 100000 h = 10536 h

t = 10536 h

90 % der Transistoren überleben eine Einsatzzeit von 10536 Stunden.

[1] Beachten Sie:
Durch das Aufsummieren wird die Wirkung des Zufalls geglättet.

3. Beispiel:

Von einer Charge von Halbleiterelementen ist bekannt, daß ihre mittlere Lebensdauer 10000 Betriebsstunden beträgt.
Es wird eine große Anzahl dieser Bauelemente eingesetzt.
Nach welcher Betriebszeit sind 50 % der Bauelemente ausgefallen?
(Halbwertszeit!)
Nehmen Sie als Lebensdauerverteilung die Exponentialverteilung an.

Lösung:

$R(t) = \exp(- t / 10000\ h)$
$R(t) = 1 - G(t) = 1 - 0.5 = 0.5$

$0.5 = \exp(- t / 10000\ h)$
$\ln 0.5 = - t / 10000\ h$
$t = \ln 0.5 * 10000\ h = 6931.5\ h$

$\underline{t = 6931.5\ h}$

Die Halbwertszeit beträgt 6931.5 Stunden. Nach dieser Betriebszeit ist die Hälfte der Bauteile ausgefallen.

4. Beispiel:

Sie entwerfen ein elektronisches Gerät. In den ersten drei Betriebsjahren sollen weniger als 1 % der Geräte ausfallen.
Wie groß muß die mittlere Lebensdauer der Geräte mindestens sein, damit diese Forderung erfüllt werden kann?
Nehmen Sie als Lebensdauerverteilung die Exponentialverteilung an.

Lösung:

$R(t) = \exp(- t / T)$
$R(3\ a) = \exp(-3\ a / T)$
$R(3\ a) = 1 - G(3\ a) = 1 - 0.01 = 0.99$

$0.99 = \exp(- 3\ a / T)$
$\ln 0.99 = - 3\ a / T$
$T = - 3\ a / \ln 0.99 = 298.5\ a$

$\underline{T = 298.5\ a}$

Die mittlere Lebensdauer muß mindestens 298.5 Jahre betragen.

5. Beispiel:

Von 10000 Bauelementen einer Serie fallen in den ersten 10 Stunden eines Dauerversuchs 50 Elemente aus.
Wie hoch ist die Überlebenswahrscheinlichkeit der Bauelemente nach einer Einsatzzeit von 200 Stunden?
Nehmen Sie als Lebensdauerverteilung die Exponentialverteilung an.

Lösung:

$R(t) = \exp(- \lambda * t)$
$R(10\ h) = \exp(- \lambda * 10\ h)$
$R(10\ h) = (10000 - 50) / 10000 = 0.995$
$0.995 = \exp(- \lambda * 10\ h)$
$\ln 0.995 = - \lambda * 10\ h$
$\lambda = - \ln 0.995 / 10\ h = 5 * 10^{-4}\ h^{-1}$

Die uberlebenswahrscheinlichkeit für die Charge von Bauteilen lautet:
$R(t) = \exp(- 5 * 10^{-4}\ h^{-1} * t)$
Für t = 200 h erhalten wir:
$R(200\ h) = \exp(- 5 * 10^{-4}\ h^{-1} * 200\ h) = 0.9046$

$\underline{R(200\ h) = 90.46\ \%}$

Die uberlebenswahrscheinlichkeit beträgt nach einer Einsatzzeit von 200 Stunden 90.46 % .

-----oooooOooooo-----

6. Beispiel:

In einer Anlage sind 100 Dioden eingebaut. Die mittlere Lebensdauer dieser Dioden beträgt 10^7 Stunden. Jeder einzelne Diodenausfall führt zu einer Störung der Anlage.
Wie groß ist die mittlere Betriebszeit der Anlage?
Nehmen Sie als Lebensdauerverteilung die Exponentialverteilung an.

Lösung:

Die Anlage funktioniert genau dann, wenn die 1. und die 2. und die 3. und ... und die 100. Diode funktioniert.
Mit Hilfe des Multiplikationssatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung für voneinander unabhängige Ereignisse erhlalten wir:

$$R_{ANLAGE}(t) = (R_{DIODE}(t))^{100}$$

Dabei bedeutet R_{ANLAGE} die Überlebenswahrscheinlichkeit der Anlage und R_{DIODE} die Überlebenswahrscheinlichkeit einer einzelnen Diode.

$$\begin{aligned} R_{ANLAGE}(t) &= (\exp(- t / T_{DIODE}))^{100} \\ &= \exp(- 100 * t / T_{DIODE}) \\ &= \exp(- t /(T_{DIODE} / 100)) \end{aligned}$$

Wir erkennen, daß die Lebensdauer der Anlage ebenfalls exponentialverteilt ist und zwar mit:

$$T_{ANLAGE} = T_{DIODE} / 100 = 10^7\ h / 100 = 10^5\ h$$

$$\underline{T_{ANLAGE} = 10^5\ h}$$

Die mittlere Lebensdauer ist indirekt proportional zur Anzahl der Dioden und beträgt im konkreten Fall nur 10^5 Stunden.

7. Beispiel:

Sie bauen elektrische Geräte, die folgende Bauelemente enthalten:

5 Elektronenröhren
10 Widerstände
6 Transistoren
6 Kondensatoren

Die Lebensdauern der Bauelemente sind näherungsweise exponentialverteilt. Die mittleren Lebensdauern betragen:

Elektronenröhren:	T_E =	2000 h
Widerstände:	T_W =	100000 h
Transistoren:	T_T =	50000 h
Kondensatoren:	T_K =	10000 h

Jeder Ausfall eines Bauteils bewirkt den Ausfall des ganzen Geräts.
Die Geräte sollen in großer Stückzahl eingesetzt werden.
Nach wie vielen Stunden ist voraussichtlich 1 % der Geräte ausgefallen?

Lösung:

Aus dem Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung für voneinander unabhängige Ereignisse folgt:

Die Überlebenswahrscheinlichkeit des Geräts ist das Produkt der Überlebenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Bauteile.

$$R_{GERÄT}(t) = \prod_{BAUTEILE} R_{BAUTEIL}(t)$$

$$R_{GERÄT}(t) = (\exp(-t / T_E))^5 * (\exp(-t / T_W))^{10} * (\exp(-t / T_T))^6 * (\exp(-t / T_K))^6$$

$$= \exp(-(5/T_E + 10/T_W + 6/T_T + 6/T_K) * t)$$

Wir erkennen, daß die Lebensdauer des Geräts auch exponentialverteilt ist und zwar mit:

$$\lambda_{GERÄT}(t) = 5 / T_E + 10 / T_W + 6 / T_T + 6 / T_K$$
$$= 5 /(2000\ h) + 10/(100000\ h) + 6/(50000\ h) + 6/(10000\ h)$$
$$= 3.32 * 10^{-3}\ h^{-1}$$

Es gilt somit:

$$R_{GERÄT}(t) = \exp(-\lambda_{GERÄT} * t) = \exp(-3.32 * 10^{-3}\ h^{-1} * t)$$

Wir sollen die Zeit t berechnen, für die die Ausfallswahrscheinlichkeit $G_{GERÄT}(t)$ 1 % beträgt. Die Überlebenswahrscheinlichkeit $R_{GERÄT}(t)$ ist dann 0.99 .

$$0.99 = \exp(-\lambda_{GERÄT} * t)$$
$$\ln 0.99 = -\lambda_{GERÄT} * t$$
$$t = -\ln 0.99 / \lambda_{GERÄT}$$
$$= -\ln 0.99 / (3.32 * 10^{-3}\ h^{-1}) = 3.027\ h$$

$\underline{t = 3.027\ h}$

Nach einer Betriebszeit von t = 3.027 Stunden werden voraussichtlich 1 % der Geräte ausgefallen sein.

Wenn ein Gerät nur dann funktioniert, wenn alle Bauteile funktionieren, gilt:

$$R_{GERÄT}(t) = \prod_{BAUTEILE} R_{BAUTEIL}(t)$$

$$\lambda_{GERÄT} = \sum_{BAUTEILE} \lambda_{BAUTEIL}$$

$$1 / T_{GERÄT} = \sum_{BAUTEILE} (1 / T_{BAUTEIL})$$

Wenn alle Bauteile eines Geräts für dessen Betrieb notwendig sind, so erhält man die mittlere Lebensdauer des Geräts, indem man die mittleren Lebensdauern der einzelnen Bauteile nach obiger Formel "harmonisch addiert".

8. Beispiel:

Eine Signallampe hat 3 gleichartige Glühbirnen mit einer mittleren Lebensdauer von 25000 Stunden eingebaut.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach einem halben Jahr noch mindestens eine Glühbirne der Signallampe leuchtet?
Wie viele Glühbirnen müssen eingebaut werden, damit die Wahrscheinlichkeit, daß nach einem halben Jahr keine Glühbirne mehr leuchtet, kleiner als 0.01 % ist?
Nehmen Sie als Lebensdauerverteilung der Glühbirnen die Exponentialverteilung an.

Lösung:

Die Signallampe leuchtet nicht, wenn die 1. <u>und</u> die 2. <u>und</u> die 3. Glühbirne nicht leuchtet.
Wir können nun den Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung für voneinander unabhängige Ereignisse für die Ausfallswahrscheinlichkeit G(t) anwenden. Wir erhalten:

$$G_{LAMPE}(t) = (G_{BIRNE}(t))^3$$

mit

$$G_{BIRNE}(t) = 1 - \exp(- t / T_{BIRNE}) = 1 - \exp(- t / 25000\ h)$$

Ein halbes Jahr entspricht ungefähr 4400 Stunden.
Für t = 4400 h erhalten wir:

$$G_{BIRNE}(4400\ h) = 1 - \exp(- 4400\ h / 25000\ h) = 0.1614$$

$$G_{LAMPE}(4400\ h) = 0.1614^3 = 0.0042$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine einzelne Glühbirne nach einem halben Jahr nicht mehr leuchtet, beträgt 16.14 % . Die Wahrscheinlichkeit, daß alle drei Glühbirnen innerhalb eines halben Jahrs ausfallen beträgt dagegen nur 0.42 % .

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, daß nach einem halben Jahr noch zumindest eine Glühbirne leuchtet beträgt 100 % - 0.42 % = 99.58 % .

$$\underline{R_{LAMPE}(t) = 99.58\ \%}$$

Wir wenden uns nun der zweiten Frage zu:
Wir bezeichnen die Anzahl der eingebauten Glühbirnen mit n.

Es gilt nun:

$$G_{LAMPE}(t) = (G_{BIRNE}(t))^n$$

Für t = 4400 h gilt:

$$G_{BIRNE}(4400\ h) = 0.1614$$

und:

$$G_{LAMPE}(4400\ h) = 0.1614^n$$

Wir sollen den kleinsten ganzahligen Wert von n ermitteln, der folgende Ungleichung erfüllt:

$$G_{LAMPE}(4400\ h) < 0.0001$$

oder:

$$0.1614^n < 0.0001$$

Wenn wir beide Seiten der Ungleichung logarithmieren, erhalten wir:

$$n * \ln 0.1614 < \ln 0.0001$$

Wir dividieren beide Seiten der Ungleichung durch die negative Zahl ln 0.1614 und erhalten: <u>$n > 5.05$</u>

Wenn die Wahrscheinlichkeit, daß nach einem halben Jahr keine Glühbirne der Signallampe mehr leuchtet, kleiner als 0.01 % sein soll, dann müssen mehr als 5 Glühbirnen eingebaut werden.

Wenn in einem Gerät n Bauteile eingebaut sind, aber ein einziges Bauteil zum Betrieb des Geräts ausreicht, so gilt:

$$G_{GERAT}(t) = (G_{BAUTEIL}(t))^n$$
$$= (1 - \exp(- t / T_{BAUTEIL}))^n$$

und:

$$R_{GERAT}(t) = 1 - (1 - R_{BAUTEIL}(t))^n$$
$$= 1 - (1 - \exp(- t / T_{BAUTEIL}))^n$$

<u>Beachten Sie:</u>
Durch den Einbau von mehreren "Reservebauteilen" wird die Ausfallswahrscheinlichkeit des ganzen Geräts wesentlich kleiner als die Ausfallswahrscheinlichkeit eines einzelnen Bauteils. Das ist das Prinzip der <u>Redundanz</u>.

Die Lebensdauer des Geräts ist nicht exponentialverteilt, d.h. die Überlebenswahrscheinlichkeit kann nicht in der Form

$$R_{GERAT}(t) = \exp(- \lambda_{GERAT} * t)$$

angegeben werden.

-----oooooOooooo-----

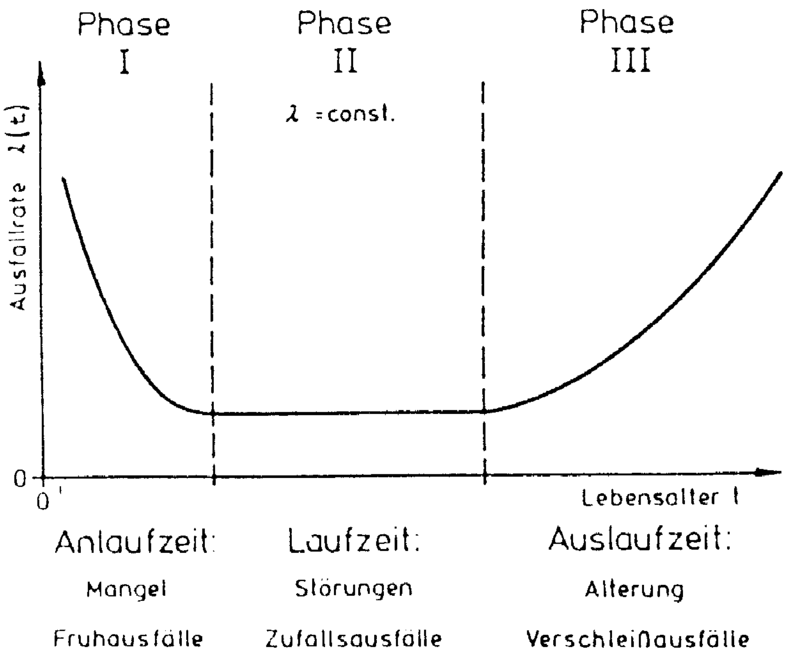
Wir haben bisher nur Beispiele betrachtet, bei denen die Ausfallsraten $\lambda(t)$ konstant und damit die Lebensdauern exponentialverteilt waren. Das bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit, daß ein noch funktionierendes Gerät im nächsten Moment ausfällt, vom Beginn der Inbetriebnahme während der gesamten Betriebszeit gleich groß ist, also nicht vom Alter des Geräts abhängt. Der Ausfall wird nur durch zufällige Störungen verursacht.

Ein typisches Beispiel dafür ist der Ausfall von Autos durch Unfälle. Die Unfallswahrscheinlichkeit ist (zumindest näherungsweise) unabhängig vom Alter des Autos.

Andererseits nimmt die Reperaturanfälligkeit und damit die Ausfallsrate deutlich mit dem Alter zu. Offensichtlich sind dabei die Grenzen der Voraussetzung von exponentialverteilten Lebensdauern überschritten.

Wenn man die Ausfallsrate von Geräten in Abhängigkeit vom Lebensalter betrachtet ergibt sich meist die "Badewannenkurve", die auf der nächsten Seite abgebildet ist.

Die „Badewannenkurve" der Ausfallrate, abhängig vom Lebensalter



Die Phase I ist durch Frühausfälle, sogenannte "Kinderkrankheiten" bestimmt. Wenn bei der Fertigung Mängel aufgetreten sind, so bewirken diese fast immer, daß das Gerät bald nach der Inbetriebnahme ausfällt. Die Ausfallsrate wird während der Phase I immer kleiner.
In der Praxis werden Geräte oft vor der Auslieferung einige Zeit in Betrieb genommen. Dadurch finndet die Phase I der Frühausfälle noch im Betrieb statt. Ansonsten wird sie häufig durch die Garantiezeit abgedeckt.

In der Phase II ist die Ausfallsrate konstant. Hier bewirken Störungen Zufallsausfälle. In der Praxis beschränkt sich sehr oft die Betriebszeit auf die Phase II. Die Voraussetzung der Exponentialverteilung als Lebensdauerverteilung ist daher in vielen Fällen zulässig.

In der Phase III nimmt dann die Ausfallsräte wieder zu. Die Alterung des Geräts macht sich nun bemerkbar. Man spricht von sogenannten Verschleißausfällen.

Das Ausfallsverhalten in den Phasen I und III kann nicht mit Hilfe der Exponentialverteilung beschrieben werden. In der Praxis verwendet man in diesen Fällen die Weibull-Verteilung[1].

Die Formel für die Überlebenswahrscheinlichkeit der Weibull-Verteilung lautet:

$$R(t) = \exp(-(t / T)^{b})$$

[1] Benannt nach dem Schweden Waloddi WEIBULL, der als erster auf die breite Anwendbarkeit dieser Verteilung aufmerksam gemacht hat.

Die Formel unterscheidet sich von der entsprechenden Formel der Exponentialverteilung dadurch, daß der Exponent (t / T) noch mit der sogenannten Ausfallssteilheit b potenziert wird.
In der Praxis liegen die Werte von b in einem Bereich zwischen 0.25 und 5 $(0.25 <\approx b <\approx 5)$.
Für $b = 1$ erhalten wir die Exponentialverteilung, die somit ein Spezialfall der Weibull-Verteilung ist.

Die Verteilungsfunktion der Weibull-Verteilung ist wie bei der Exponentialverteilung die Ausfallswahrscheinlichkeit.

$$G(t) = 1 - \exp(- (t / T)^b)$$

Wir erhalten die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $g(t)$ als 1. Ableitung der Verteilungsfunktion $G(t)$.

$$\begin{aligned} g(t) &= G'(t) = 0 - \exp(- (t/T)^b) * (- b/T * (t/T)^{b-1}) \\ &= b/T * (t/T)^{b-1} * \exp(- (t/T)^b) \\ &= b/T * (t/T)^{b-1} * R(t) \end{aligned}$$

Wir berechnen nun die Ausfallsrate $\lambda(t)$ nach der Formel:

$$\lambda(t) = g(t) / R(t) = b/T * (t/T)^{b-1}$$

Beachten Sie:
Auch bei der Weibull-Verteilung ist die Differentialgleichung

$$R'(t) = -\lambda(t) * R(t)$$

erfüllt.

Für die charkateristische Lebensdauer T gilt:

$$\begin{aligned} R(T) &= \exp(- (T / T)^b) = \exp(-1) = 0.3679 \\ G(T) &= 1 - R(T) = 0.6321 \\ g(T) &= 0.6321 * b / T \\ \lambda(T) &= b / T \end{aligned}$$

Wir wollen nun den Mittelwert μ und die Varianz σ^2 der Weibull-Verteilung berechnen:

$$\mu = \int_0^\infty t * g(t)\, dt = \int_0^\infty t * b/T * (t/T)^{b-1} * \exp(- (t/T)^b)\, dt$$

Wir substituieren: $u = (t/T)^b$.
Dann gilt: $du = b/T * (t/T)^{b-1}$
$t = T * u^{1/b}$

$$\mu = \int_0^\infty T * u^{1/b} * \exp(-u)\, du$$

$\underline{\mu = T * a}$ mit $a = \Gamma(1/b + 1)$ ...[1]

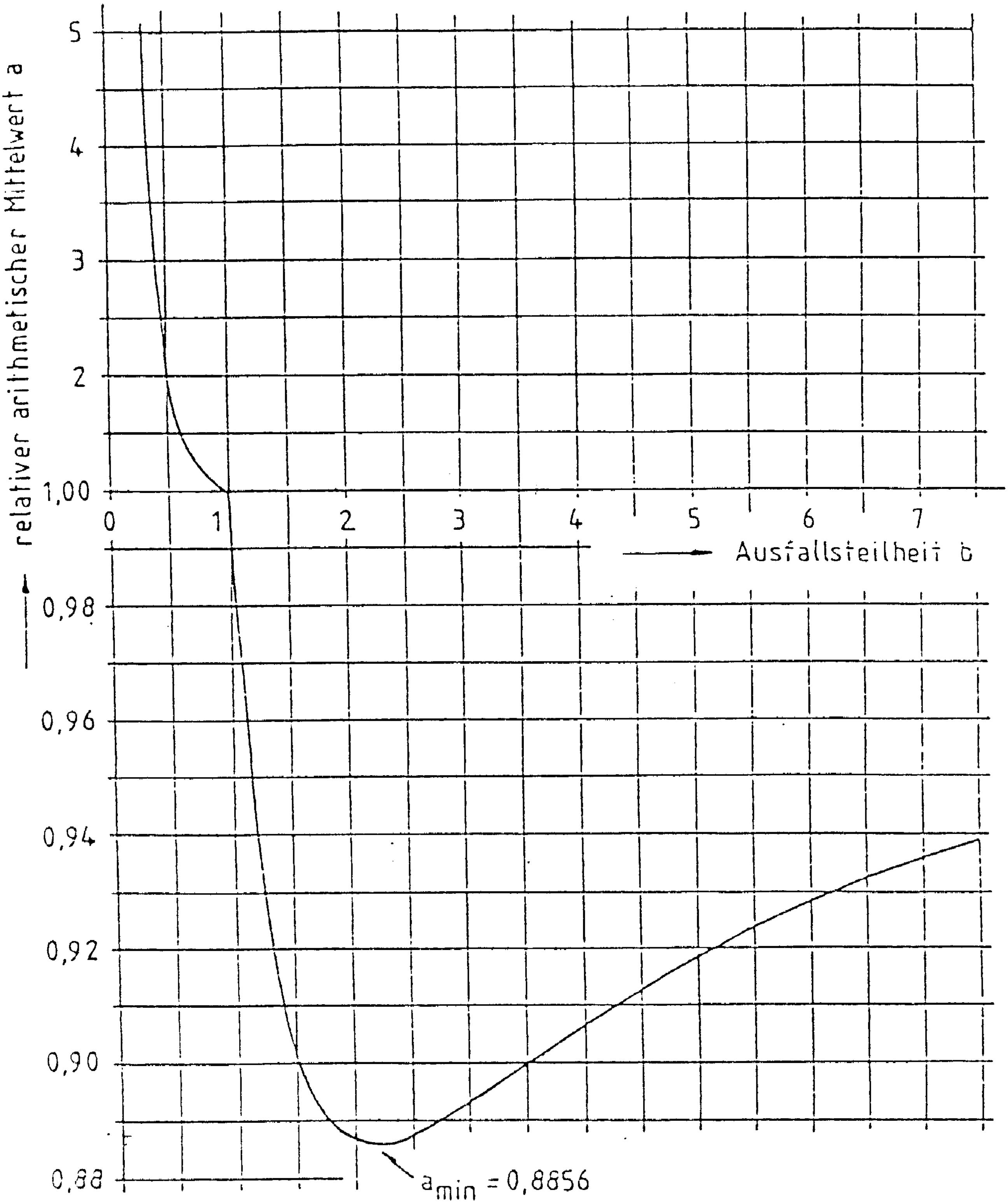
$a = \mu / T$ heißt relativer arithmetischer Mittelwert.

Dabei gilt: $$\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp(-u) * u^{x-1}\, du \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

Für ganzzahlige Werte von x gilt: $\Gamma(x) = (x - 1)!$

[1] Γ ist das Symbol für die Gamma-Funktion.

Die folgende Abbildung zeigt den relativen arithmetischen Mittelwert
$a = \Gamma(1/b + 1)$
in Abhangigkeit von b.



für a > 1 Maßstabänderung beachten

Wir sehen:
Nur für b = 1 ist a = 1. Daher stimmt nur für die Exponentialverteilung die mittlere Lebensdauer mit der charakteristischen Lebensdauer T überein.

Wir wollen nun die Varianz σ^2 mit Hilfe der Formel

$$\sigma^2 = \int_0^\infty t^2 * g(t)\,dt - \mu^2$$

berechnen.

$$\int_0^\infty t^2 * g(t)\,dt = \int_0^\infty t^2 * b/T * (t/T)^{b-1} * \exp(-(t/T)^b)\,dt$$

Wir substituieren wieder

$$u = (t / T)^b$$
$$du = b / T * (t / T)^{b-1}$$
$$t = T * u^{1/b}$$

und erhalten:

$$\int_0^\infty t^2 * g(t)\,dt = \int_0^\infty T^2 * u^{2/b} * \exp(-u)\,du = T^2 * \Gamma(2/b + 1)$$

$\underline{\sigma^2 = T^2 * d^2}$ mit $d^2 = \Gamma(2/b + 1) - \Gamma^2(1/b + 1)$

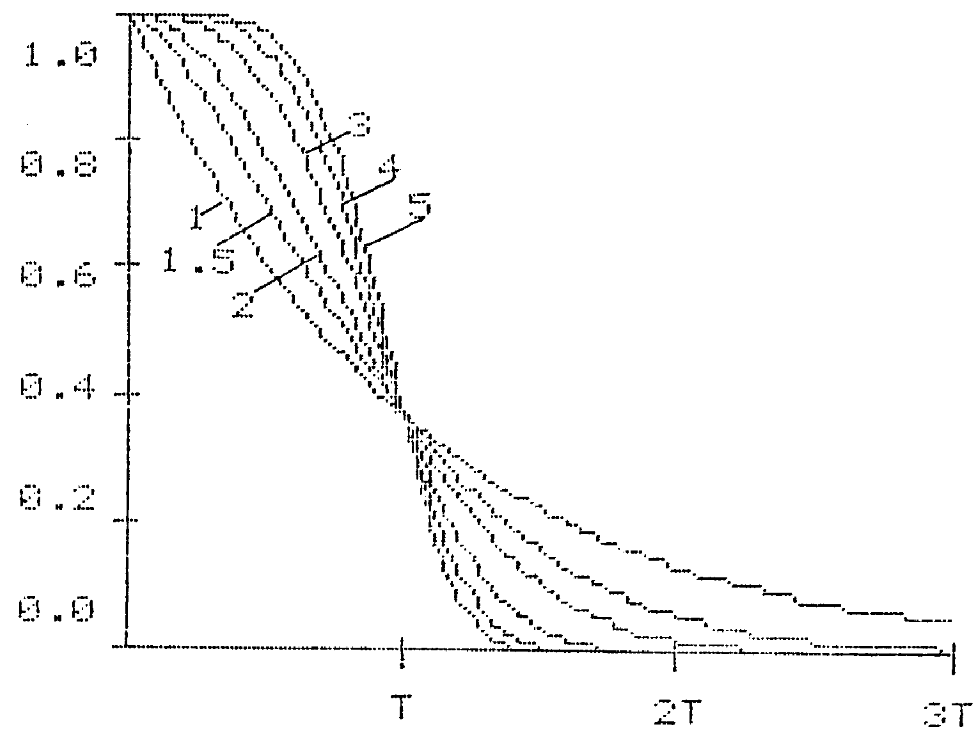
$d = \sigma / T$ heißt relative Standardabweichung.

Die folgenden Abbildungen zeigen die Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$, die Ausfallswahrscheinlichkeit $G(t)$, die Wahrscheinlichkeitsdichte $g(t)$ und die Ausfallsrate $\lambda(t)$ der Weibull-Verteilung für einige gebräuchliche Werte der Ausfallssteilheit b.
(b = 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.5, 2, 3, 4, 5)

Überlebenswahrscheinlichkeit

R(t)= exp(-(t/T)^b)

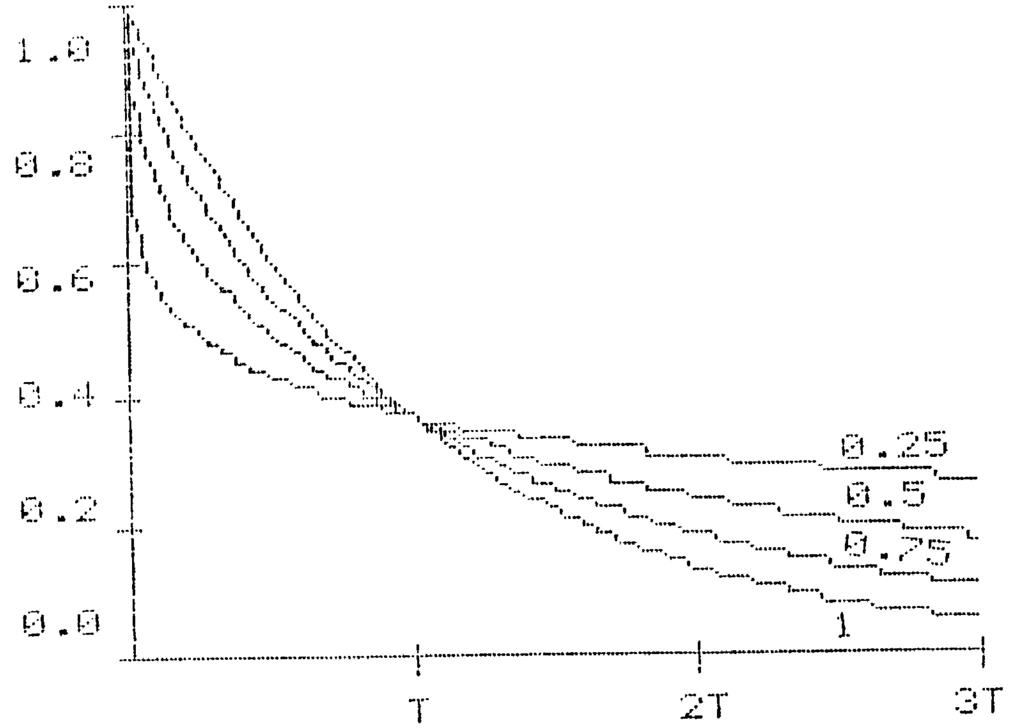
mit T = 1 und b >= 1



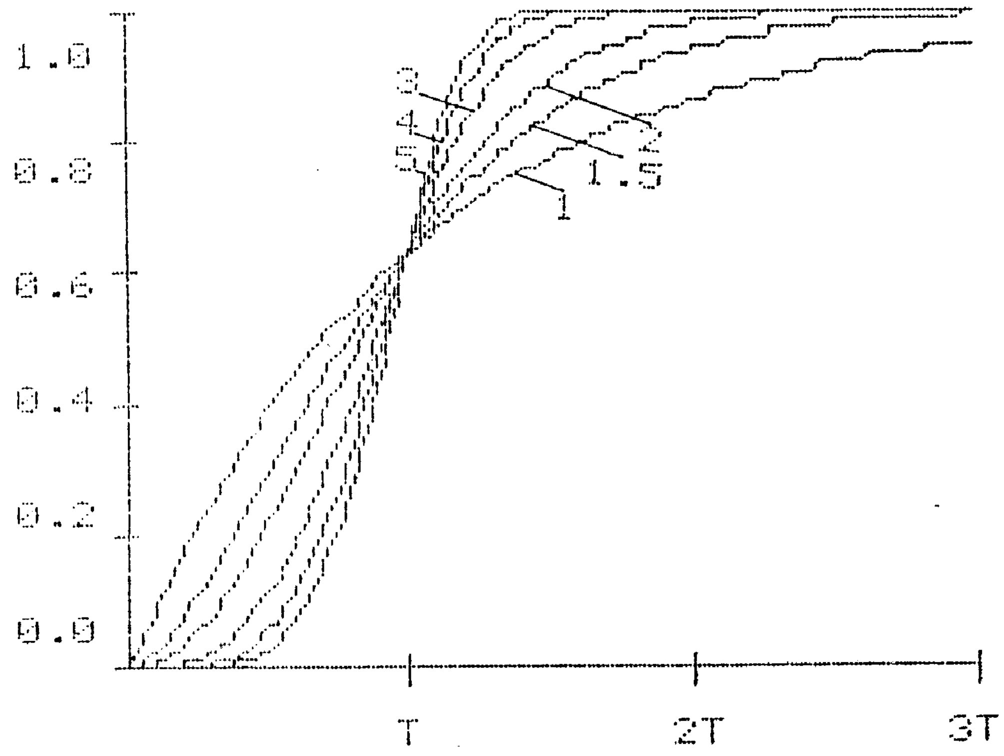
uberlebenswahrscheinlichkeit

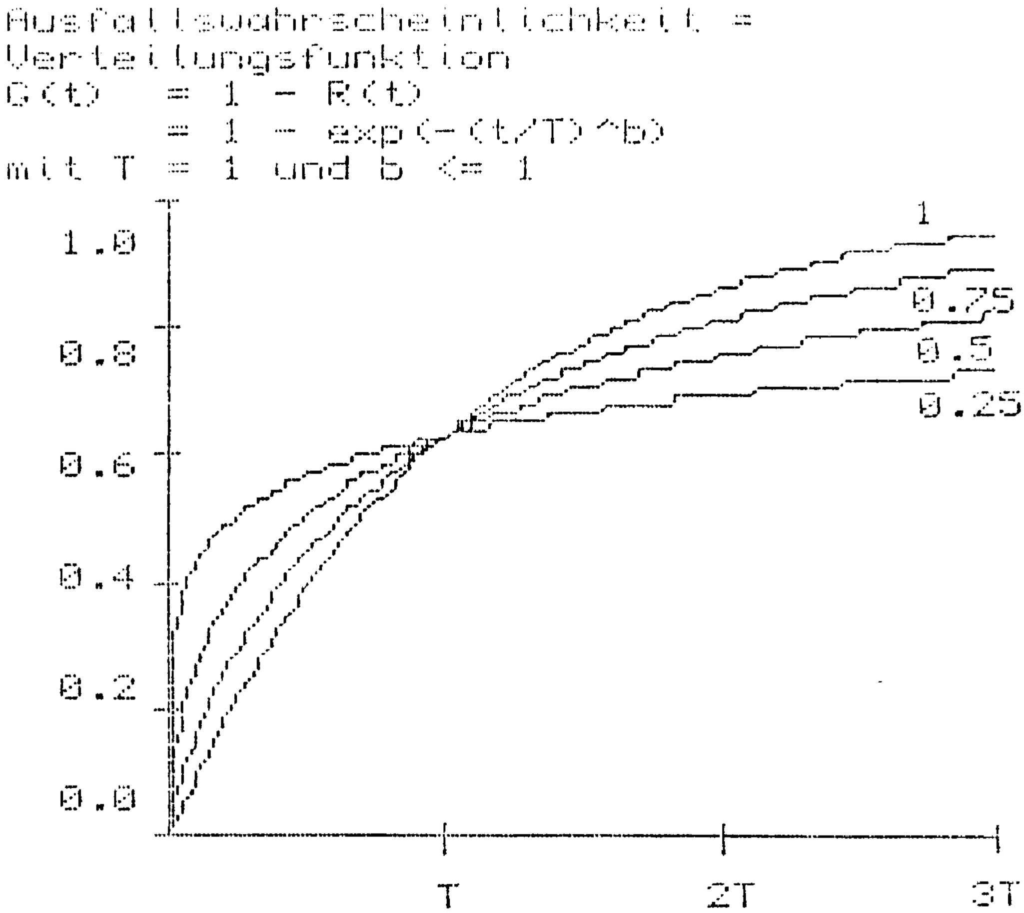
R(t)= exp(-(t/T)^b)

mit T = 1 und b <= 1



Ausfallswahrscheinlichkeit =
Verteilungsfunktion
G(t) = 1 - R(t)
= 1 - exp(-(t/T)^b)
mit T = 1 und b >= 1





Wir sehen, daß für alle Werte von b die Überlebenswahrscheinlichkeit

$$R(t) = \exp(-(t / T)^b)$$

für t = T gleich groß ist, nämlich ungefähr 0.37 .
Je größer b ist, desto steiler fällt die Überlebenswahrscheinlichkeit im Bereich um die charakteristische Lebensdauer T ab.
Für kleine Werte von b nimmt die Überlebenswahrscheinlichkeit zuerst stark und dann immer weniger ab.

Die Ausfallswahrscheinlichkeit

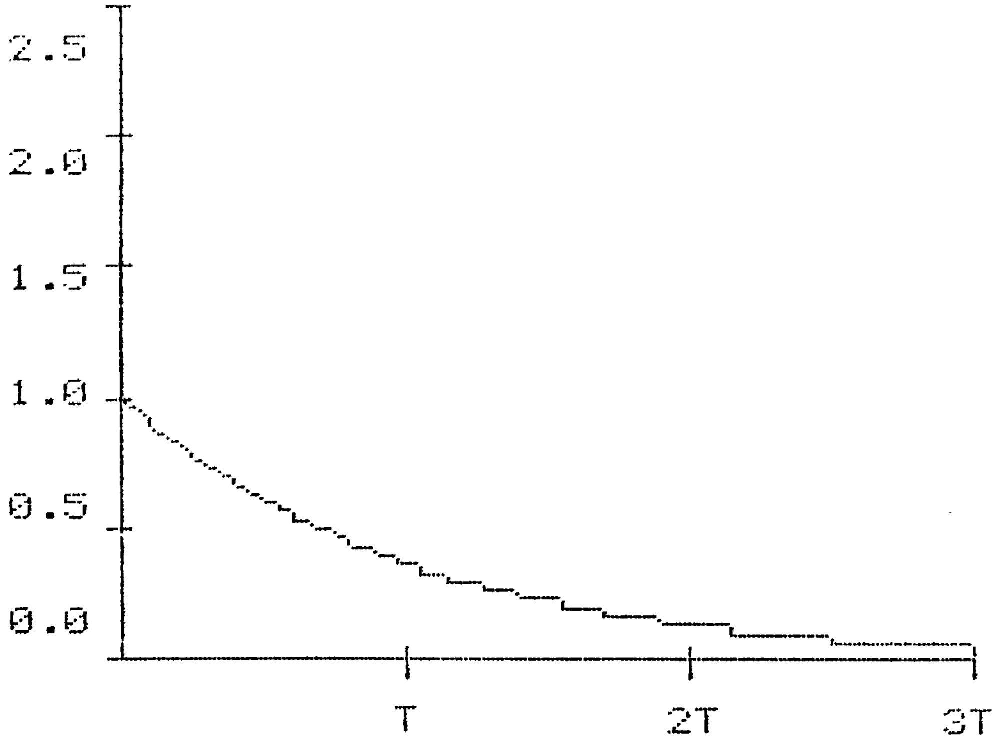
$$G(t) = 1 - R(t) = 1 - \exp(-(t / T)^b)$$

zeigt ein spiegelbildliches Verhalten. Für alle Werte von b ist G(T) ungefähr 0.63 .

Beachten Sie:
Die Überlebenswahrscheinlichkeit R(t) und die Ausfallswahrscheinlichkeit G(t) hängen nur vom relativen Lebensalter t' = t / T und von b ab.
Die Werte g(t) der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und die Werte $\lambda(t)$ der Ausfallsrate sind darüber hinaus indirekt proportional zur charakteristischen Lebensdauer T.
Für die folgenden Abbildungen setzen wir T = 1 voraus.
Für die Weibull-Verteilung mit der charakteristischen Lebensdauer T gilt: Wenn wir anstelle des Lebensalters t das relative Lebensalter t' = t / T betrachten, erhalten wir die Weibull-Verteilung mit T = 1 .
T = 1 bedeutet daher keine Einschränkung der Allgemeinheit.

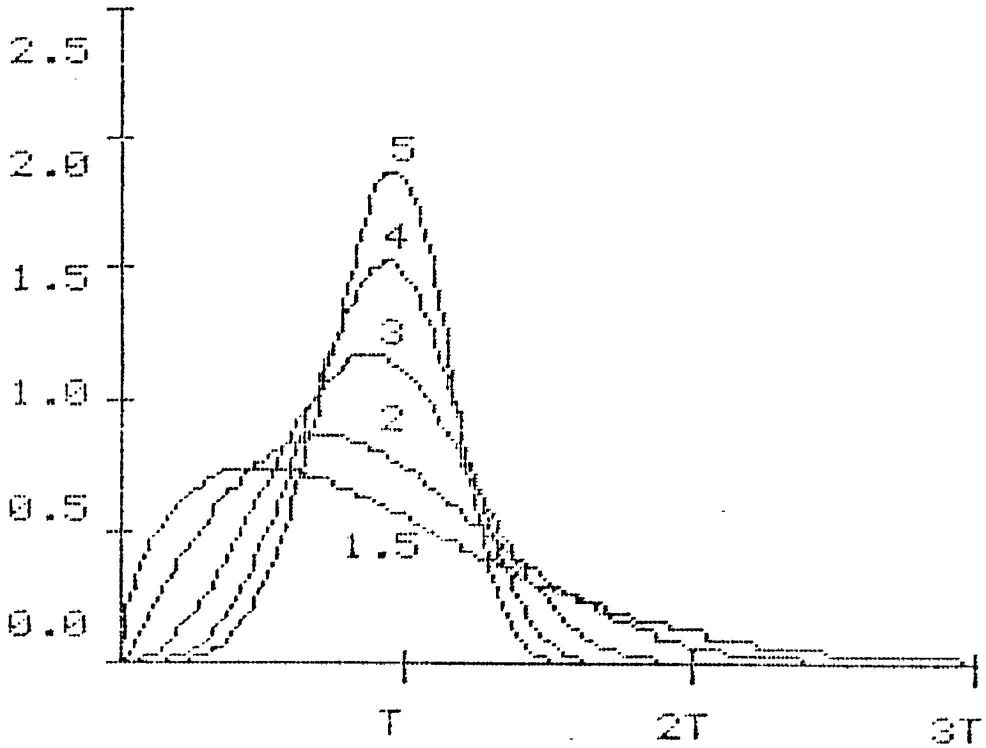
Wahrscheinlichkeitsdichte

g(t) = G'(t) = - R'(t)
= b/T*(t/T)^(b-1)*exp(-(t/T)^b)
mit T = 1 und b = 1



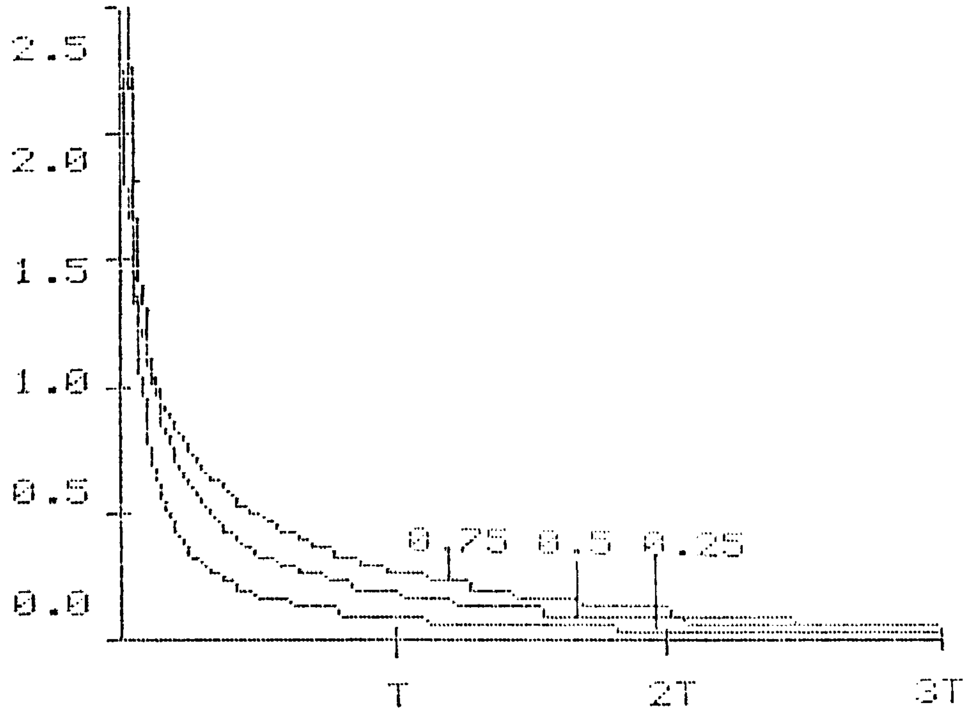
Wahrscheinlichkeitsdichte

g(t) = G'(t) = - R'(t)
= b/T*(t/T)^(b-1)*exp(-(t/T)^b)
mit T = 1 und b > 1



Wahrscheinlichkeitsdichte

g(t) = G'(t) = - R'(t)
= b/T*(t/T)^(b-1)*exp(-(t/T)^b)
mit T = 1 und b < 1



Für b = 1 nimmt die <u>Wahrscheinlichkeitsdichte</u>

$$g(t) = 1/T * \exp(- t / T)$$

exponentiell von 1 / T auf 0 ab. Wir haben T = 1 vorausgesetzt und daher gilt 1 / T = 1 .

Allgemein gilt:

$$g(t) = b/T * (t/T)^{b-1} * \exp(- (t / T)^{b})$$

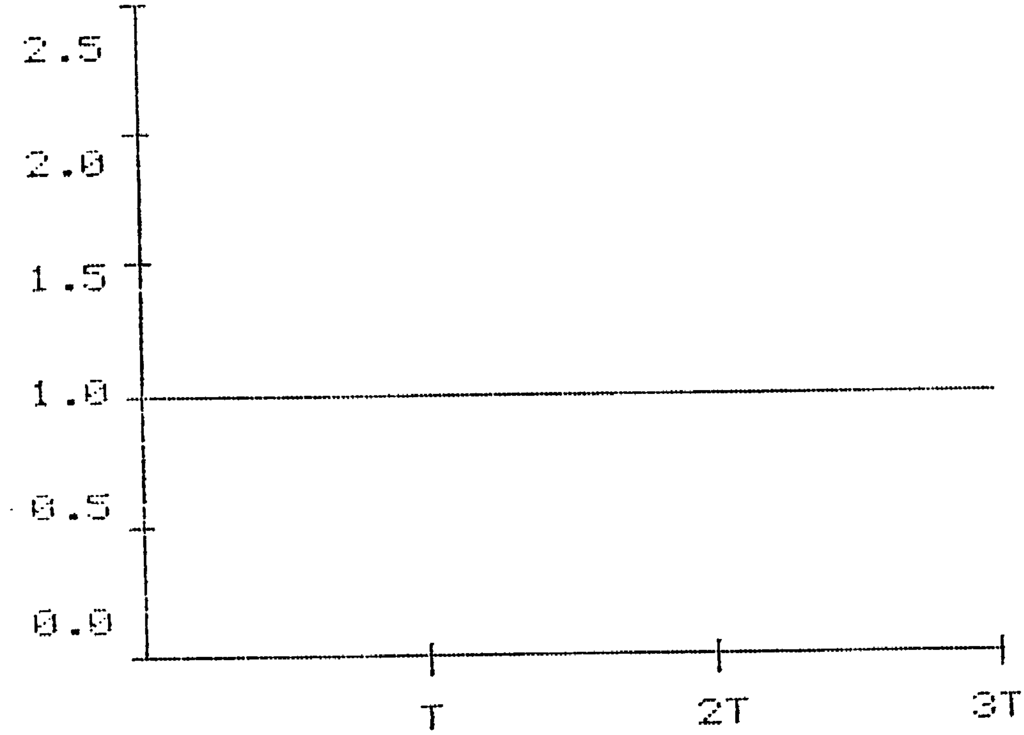
Für b > 1 hat die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zum Zeitpunkt t = 0 den Wert 0. Nach dem Durchlaufen eines Maximums nähert sich die Wahrscheinlichkeitsdichte asymptotisch 0. Das Maximum ist umso schärfer je größer b ist und liegt für große Werte von b in der Nähe der charakteristischen Lebensdauer T.
Offensichtlich beeinflußt hier das Alter des Geräts das Ausfallsverhalten.
Einerseits nimmt die Wahrscheinlichkeitsdichte im Verlauf der Zeit zu, weil das Gerät altert.
Andererseits wird die Wahrscheinlichkeitsdichte immer kleiner, weil die Wahrscheinlichkeitsdichte zum Bestand proportional ist.
Dazwischen liegt ein Maximum.
Je größer b ist,desto weniger wird das Ausfallsverhalten von zufälligen Störungen und umso mehr von Verschleißerscheinungen bestimmt.

Für b < 1 ist die Wahrscheinlichkeitsdichte zum Zeitpunkt 0 unendlich. Sie fällt zuerst sehr steil und wird dann immer flacher.
Zuerst gibt es viele Frühausfälle. Dann nimmt sowohl die Wahrscheinlichkeit für Frühausfälle als auch die für Zufallsausfälle (proportional zum Bestand!) ab.

Ausfallsrate

$$\lambda(t) = g(t) \,/\, R(t) = b/T * (t/T)^{\wedge}(b-1)$$

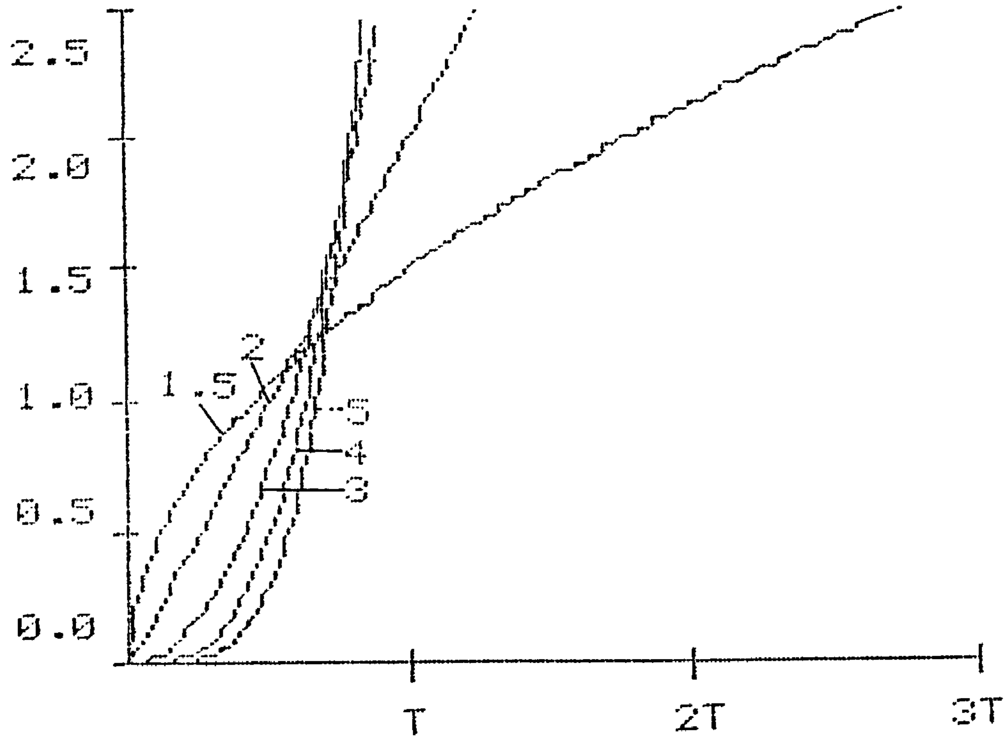
mit T = 1 und b = 1

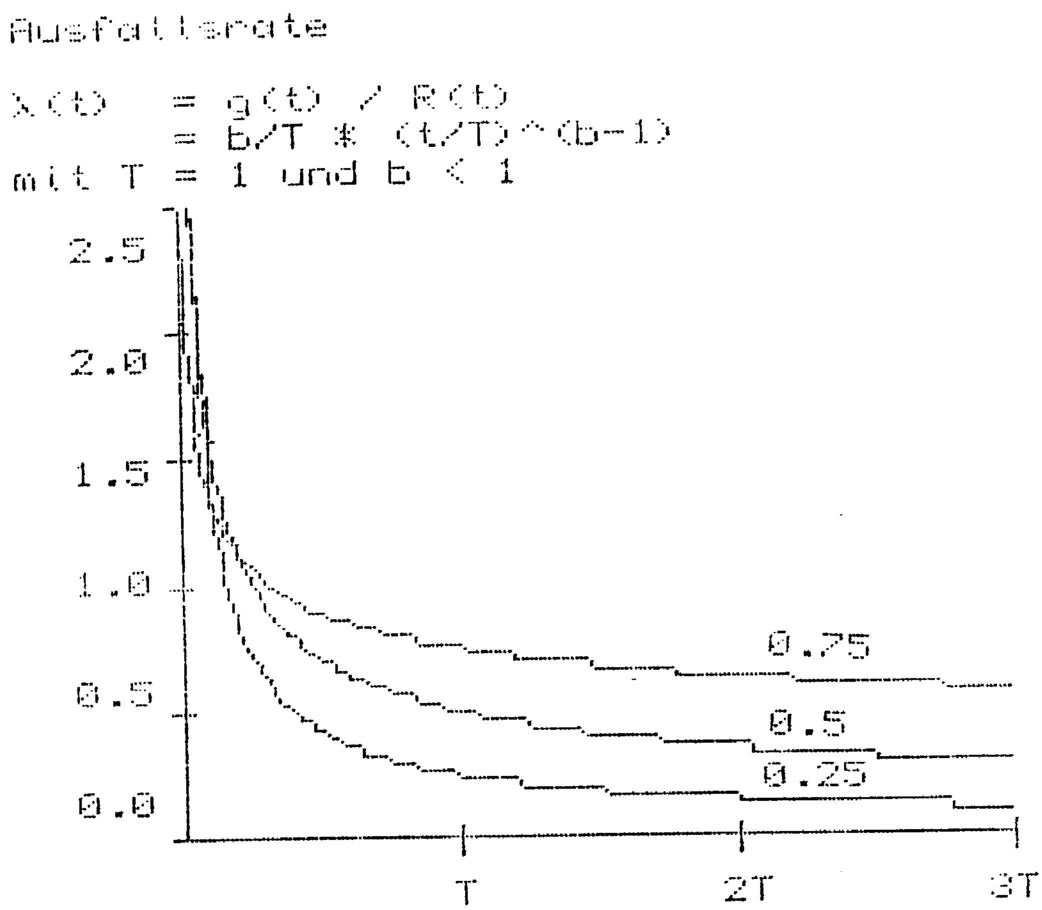


Ausfallsrate

$$\lambda(t) = g(t) \,/\, R(t) = b/T * (t/T)^{\wedge}(b-1)$$

mit T = 1 und b > 1





Für b = 1 ist die Ausfallsrate $\lambda(t)$ konstant. Die Ausfallsrate $\lambda(t)$ stellt eine Parallele zur t-Achse dar. Das heißt, für b = 1 erhalten wir die Phase II der Badewannenkurve.
Während der gesamten Betriebszeit fällt pro Zeiteinheit der gleiche Anteil der noch funktionierenden Geräte aus. Die Ausfälle werden durch zufällige, vom Lebensalter der Geräte unabhängige Störungen verursacht.

Allgemein gilt:

$$\lambda(t) = b/T * (t/T)^{b-1}$$

Für Werte von b zwischen 1 und 2 (1 < b < 2) stellt die Ausfallsrate eine von 0 ausgehende, immer flacher werdende Kurve dar.

Für b = 2 gilt: $\lambda(t) = 2 * t / T^2$
Das ist eine Gerade durch den Ursprung mit der Steigung $2 / T^2$.
Für b = 2 nimmt die Ausfallsrate linear zu.

Für b > 2 stellt die Ausfallsrate eine immer steiler werdende Kurve dar. Das ist die Phase III in der Badewannenkurve. Durch den Verschleiß der Geräte wird die Ausfallsrate immer größer.

Für b < 1 ist die Ausfallsrate zum Zeitpunkt t = 0 unendlich. Sie nimmt zuerst stark, dann immer weniger ab und nähert sich asymptotisch Null. Das ist die Phase I in der Badewannenkurve, die Frühausfälle beschreibt.

Wir sehen:

Mit Hilfe der Weibull-Verteilung sind wir in der Lage, die einzelnen Phasen des Ausfallsverhaltens eines Geräts im Verlauf seiner Einsatzzeit zu beschreiben.

Die Phase I der Frühausfälle durch Mängel in der Fertigung wird mit Hilfe der Weibull-Verteilung mit $b < 1$ beschrieben.

Die Phase II der Zufallsausfälle durch vom Lebensalter unabhängige Störungen wird mit Hilfe der Exponentialverteilung, das ist die Weibull-Verteilung mit $b = 1$, beschrieben.

Die Phase III der Verschleißausfälle durch die Alterung des Geräts wird durch die Weibull-Verteilung mit $b > 1$ beschrieben.

-----oooooOooooo-----

BEISPIELE

1. Beispiel:

Sie produzieren elektrische Geräte. Ihnen ist bekannt, daß das Lebensdauerverhalten in guter Näherung durch ein Weibull-Verteilung beschrieben wird, die die Ausfallssteilheit $b = 2$ besitzt.
Bisher wird Garantie für 1 Jahr gegeben. Innerhalb dieser Zeit gab es 0.5 % Ausfälle. Nun soll die Garantiezeit auf 2 Jahre verlängert werden.
Mit wie vielen Ausfällen muß man während dieser Garantiezeit ungefähr rechnen?

Lösung:

$$R(t) = \exp(-(t / T)^2)$$
$$R(1\ a) = \exp(-(1\ a / T)^2)$$
$$R(2\ a) = \exp(-(2\ a / T)^2) = \exp(-4(1\ a / T)^2)$$
$$= (\exp(-(1\ a / T)^2)^4$$

$$R(2\ a) = (R(1\ a)^4 = 0.995^4 = 0.9802$$
$$G(2\ a) = 1 - R(2\ a) = 1 - 0.9802 = 0.0198$$

$G(2\ a) = 1.98\ \%$

Während einer Garantiezeit von 2 Jahren werden ungefähr 2 % der Geräte ausfallen, also viermal so viel wie während der einjährigen Garantiezeit. ...[1]

2. Beispiel:

Eine Serie von Relais hat als Lebensdauerverteilung die Weibull-Verteilung mit der charakteristischen Lebensdauer $T = 10^6$ Stunden und der Ausfallssteilheit $b = 3$.
5 dieser Relais sind lebenswichtige Bestandteile einer Anlage (Die Anlage versagt, wenn eines der Relais versagt).
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese Anlage $5 * 10^5$ Stunden funktioniert?

[1] Beachten sie: Für kleine x-Werte gilt: $\exp(x^2) \approx x^2$

Lösung:

$$R(t) = \exp(-(t / T)^3)$$
$$R(5 * 10^5\ h) = \exp(-(5 * 10^5\ h / 10^6)^3)$$
$$= \exp(-0.5^3) = 0.8825$$

Die Anlage funktioniert, wenn das 1. und das 2. und das 3. und das 4. und das 5. Relais funktioniert. Mit Hilfe des Multiplikationssatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung für voneinander unabhängige Ereignisse erhalten wir:

$$R_{ANLAGE}(t) = (R_{RELAIS}(t))^5 = 0.8825^5 = 0.5353$$
$$\underline{R_{ANLAGE}(5 * 10^5\ h) = 53.55\ \%}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Anlage 5 * 10^5 Stunden funktioniert beträgt 53.55 % .

-----oooooOooooo-----

In der Praxis sind sehr oft die Parameter charakteristische Lebensdauer T und die Ausfallssteilheit b der Weibull-Verteilung nicht bekannt.
Durch die Prüfung einer Stichprobe will man das Ausfallsverhalten der gesamten Fertigung schätzen.

Will man die Parameter von normalverteilten Meßwerten schätzen, so geht das relativ einfach:
Man berechnet den Mittelwert $\bar{x}$ und die Standardabweichung s der Stichprobe. $\bar{x}$ ist ein Schätzwert für den Mittelwert μ der Normalverteilung, s ist ein Schätzwert für die Standardabweichung σ der Normalverteilung.

Man kann auch bei der Zuverlässigkeitsprüfung den Mittelwert $\bar{t}$ und die Standardabweichung s der Ausfallszeiten aller geprüfter Stücke berechnen.

Wenn bekannt ist, daß die Lebensdauer der betreffenden Geräte exponentialverteilt ist, so darf man bei einer hinreichend großen Stichprobe davon ausgehen, daß $\bar{t}$ und s ungefähr gleich groß und gute Schätzwerte für die charakteristische Lebensdauer T sind.
Damit kann man die Lebensdauerverteilung angeben und die Überlebenswahrscheinlichkeit

$$R(t) = \exp(-t / T)$$

und die Ausfallswahrscheinlichkeit

$$G(t) = 1 - \exp(-t / T)$$

für jeden Zeitpunkt berechnen.

Wenn hingegen die Lebensdauer Weibull-verteilt ist, so ist bei einer hinreichend großen Stichprobe $\bar{t}$ ein guter Schätzwert für μ und s ein guter Schätzwert von σ, wobei μ und σ nicht mit der charakteristischen Lebensdauer T übereinstimmen. Die mittlere Lebensdauer und die Standardabweichung sagen allein nicht viel aus. Für die Angabe der Überlebens- und Ausfallswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Zeit benötigt man die beiden Parameter charakteristische Lebensdauer T und die Ausfallssteilheit b.

über ein nichtlineares Gleichungssystem hängen die beiden Parameter T und b von μ und σ ab:

$$\mu = T \cdot \Gamma(1/b + 1)$$
$$\sigma^2 = T^2 \cdot (\Gamma(2/b + 1) - \Gamma^2(1/b + 1))$$

Für die Praxis ist die Lösung dieses Gleichungssystems viel zu aufwendig.

Eine andere Möglichkeit, die Lebensdauerverteilung zu schätzen, besteht darin, daß man den relativen Bestand bzw. die relative Ausfallhäufigkeitssumme der Stichprobe für verschiedene Zeitpunkte berechnet und als Schätzwert für die überlebens- bzw. Ausfallswahrscheinlichkeit verwendet.

Wir wollen diese Möglichkeit anhand eines konkreten Beispiels ausprobieren:

BEISPIEL

In einem Werk, das Wälzlager herstellt, wurde mit 50 Lagern ein Lebensdauerversuch durchgeführt. Ermittelt wurde jeweils die Laufzeit bis zum Ausfall des Lagers (Angabe in 10^6 Umdrehungen).
Die nachstehende Tabelle zeigt das Prüfergebnis:

Laufzeit t (10^6 Umdrehungen)	Bestand B(t)	Laufzeit t (10^6 Umdrehungen)	Bestand B(t)
1	49	12	19
2	47	14	18
3	45	16	15
4	43	18	9
5	39	20	8
6	37	25	3
8	31	30	2
10	25	40	0

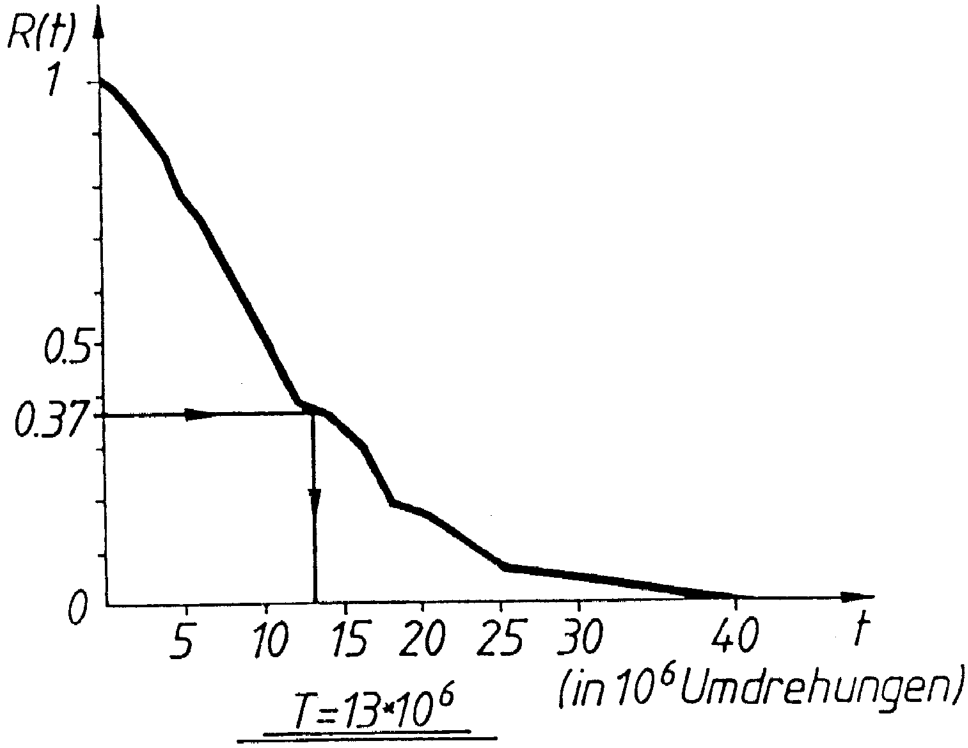
Bestimmen Sie die Lebensdauerverteilung der Wälzlager!

<u>Lösung:</u>

Wir bestimmen zunächst die relativen Bestände:

Laufzeit t (10^6 Umdrehungen)	Relativer Bestand $\hat{R}(t) = B(t)/50$	Laufzeit t (10^6 Umdrehungen)	Relativer Bestand $\hat{R}(t) = B(t)/50$
1	0.98	12	0.38
2	0.94	14	0.36
3	0.90	16	0.30
4	0.86	18	0.18
5	0.78	20	0.16
6	0.74	25	0.06
8	0.62	30	0.04
10	0.50	40	0.00

Wir stellen nun den relativen Bestand in Abhängigkeit von der Laufzeit t graphisch dar:



Wir können nun relativ leicht die charakteristische Lebensdauer bestimmen. Der relative Bestand zum Zeitpunkt $t = T$ beträgt ungefähr 0.37 . Aus der Zeichnung lesen wir ab:

$$\underline{T = 13 * 10^6 \text{ Umdrehungen}}$$

Die Ausfallssteilheit b können wir jedoch kaum schätzen. Es gelingt nur schwer zu entscheiden, welche der Kurven $R(t) = \exp(-(t / T)^b)$ die obige Häufigkeitsverteilung am besten wiedergibt.

Wir wollen daher den Maßstab so ändern, daß die Überlebenswahrscheinlichkeit durch eine Gerade dargestellt wird. Dadurch wird das Problem der Bestimmung der Weibull-Verteilung, die die Stichprobenergebnisse am besten wiedergibt, auf das Bestimmen einer Ausgleichsgeraden zurückgeführt.

Wir gehen von der Formel für die Überlebenswahrscheinlichkeit aus und logarithmieren sie:

$$R(t) = \exp(-(t / T)^b)$$
$$\ln(R(t)) = -(t / T)^b$$

oder:

$$-\ln(R(t)) = (t / T)^b$$

Beide Seiten der Gleichung sind positiv. Wir linearisieren die Gleichung, indem wir auf beide Seiten den Zehnerlogarithmus anwenden:

$$\log(-\ln(R(t))) = b * \log(t / T)$$

oder:

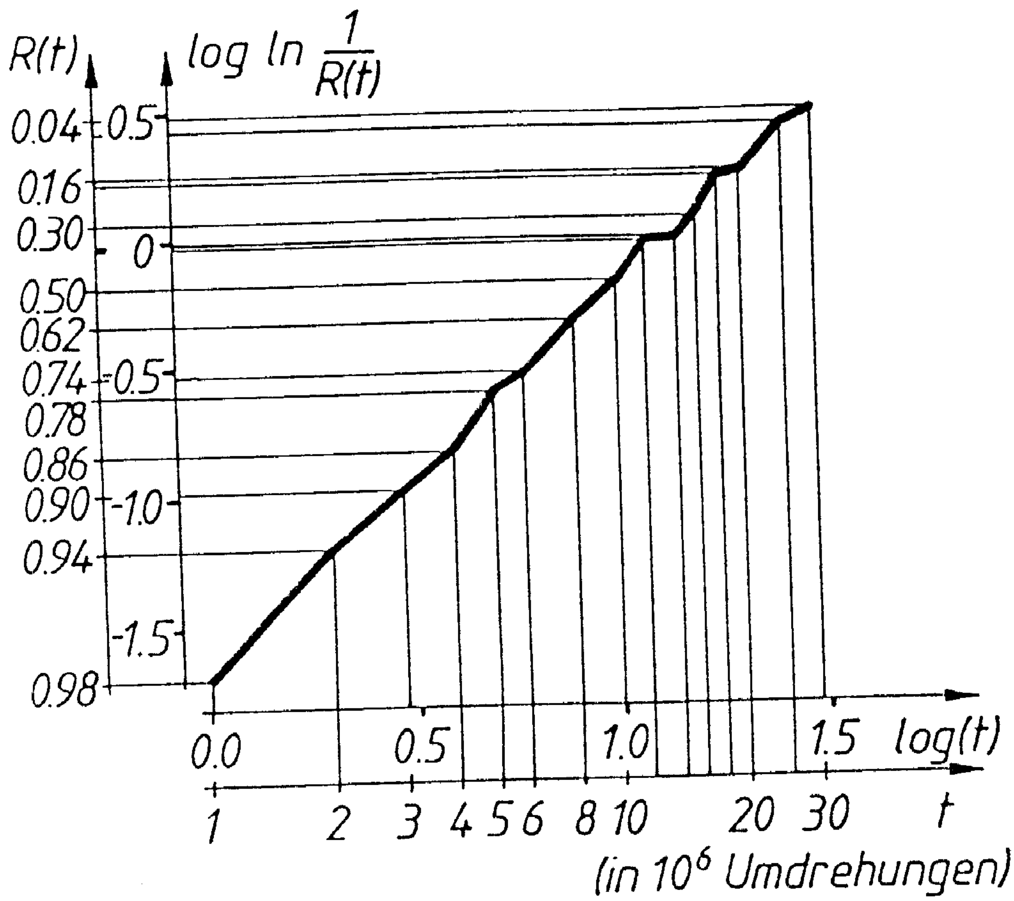
$$\log(\ln(1 / R(t))) = b * \log t - b * \log T$$

Wenn wir auf der x-Achse den Zehnerlogarithmus log t der Laufzeit und auf der y-Achse log (ln (1 / R(t))) auftragen, so erhalten wir eine Gerade mit der Steigung b und dem Ordinatenabschnitt - b * log T.

Für unser Beispiel erhalten wir:

t	log(t)	$\hat{R}$(t)	log (ln (1 / $\hat{R}$(t)))
1	0.000	0.98	-1.695
2	0.301	0.94	-1.208
3	0.477	0.90	-0.977
4	0.602	0.86	-0.822
5	0.699	0.78	-0.605
6	0.778	0.74	-0.521
8	0.903	0.62	-0.321
10	1.000	0.50	-0.159
12	1.079	0.38	-0.014
14	1.146	0.36	0.009
16	1.204	0.30	0.081
18	1.255	0.18	0.234
20	1.301	0.16	0.263
25	1.398	0.06	0.449
30	1.477	0.04	0.508
40	1.602	0.00	existiert nicht

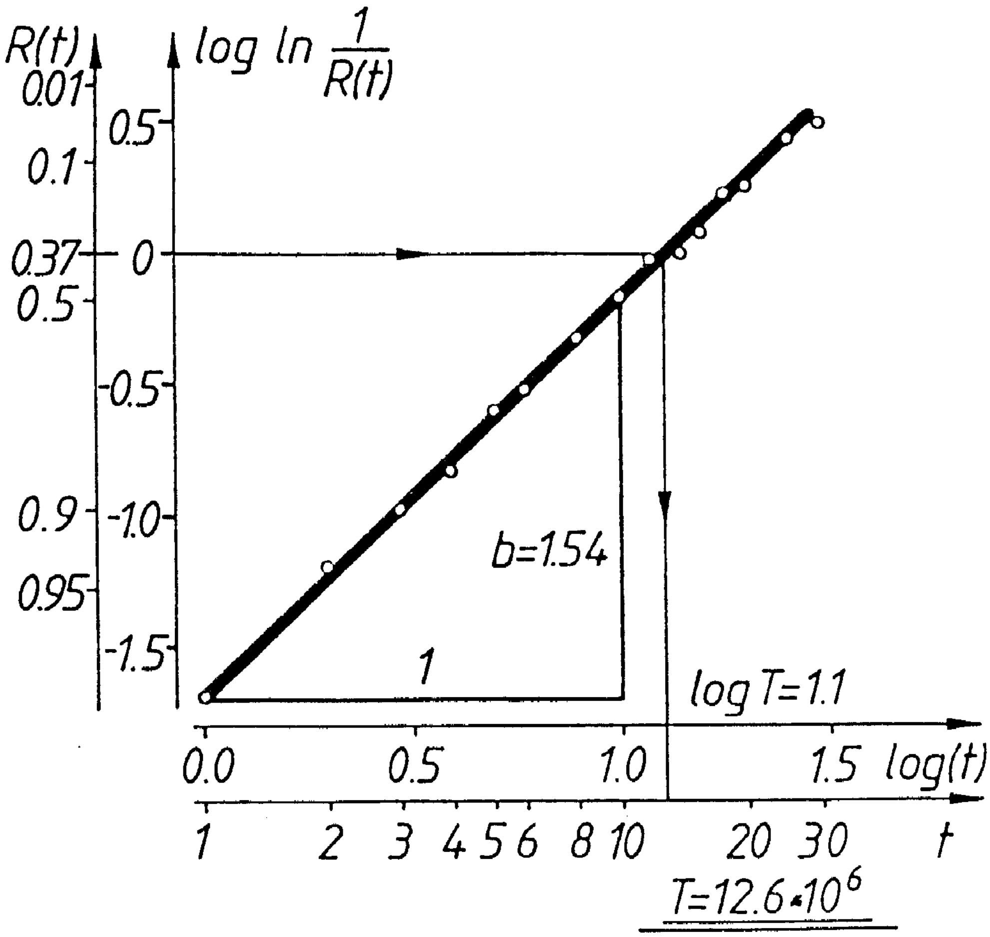
Wir stellen nun log (ln (1 / R(t))) in Abhängigkeit von log t dar:



Wir haben zusätzliche x- und y-Achsen eingezeichnet, in denen wir die zu log t gehörigen t-Werte und die zu log (ln (1 / R(t))) gehörigen Werte von R(t) eingetragen haben.

Beachten Sie:
Die Punkte t = 0 , sowie R(t) = 0 und R(t) = 1 können in den entsprechenden logarithmischen Maßstäben nicht dargestellt werden.

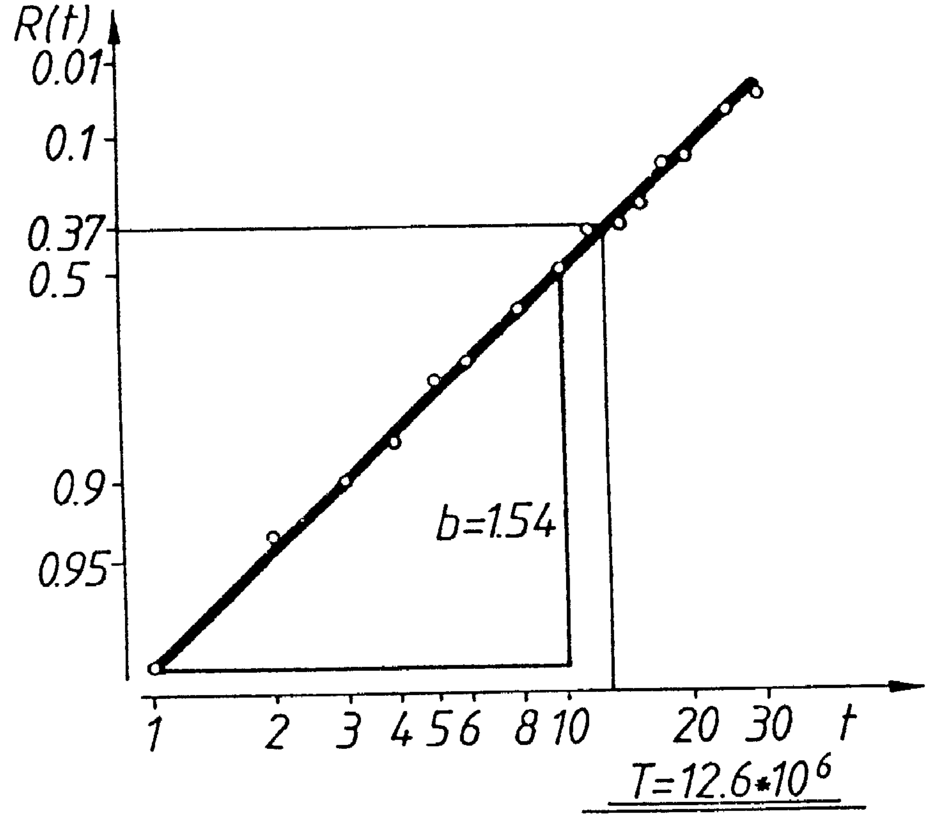
Die Punkte, die den Stichprobenergebnissen entsprechen, liegen näherungsweise auf einer Geraden.



Die Steigung dieser Geraden ist die Ausfallssteilheit b.
Aus der Zeichnung lesen wir ab: b = 1.54

Der charakteristischen Lebensdauer T entspricht auf der x-Achse log T.
Der entsprechende Funktionswert ist log (ln (1 / exp(-1))) = 0 .
Aus der Zeichnung lesen wir ab: log T = 1.1 oder $T = 12.6 \cdot 10^{6}$

üblicherweise werden nicht die linear geteilten Achsen von log t und log (ln (1 / R(t)), sondern nur die logarithmisch geteilte Achse von t und die Achse mit der Funktionsleiter von R(t) eingezeichnet.
Das ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



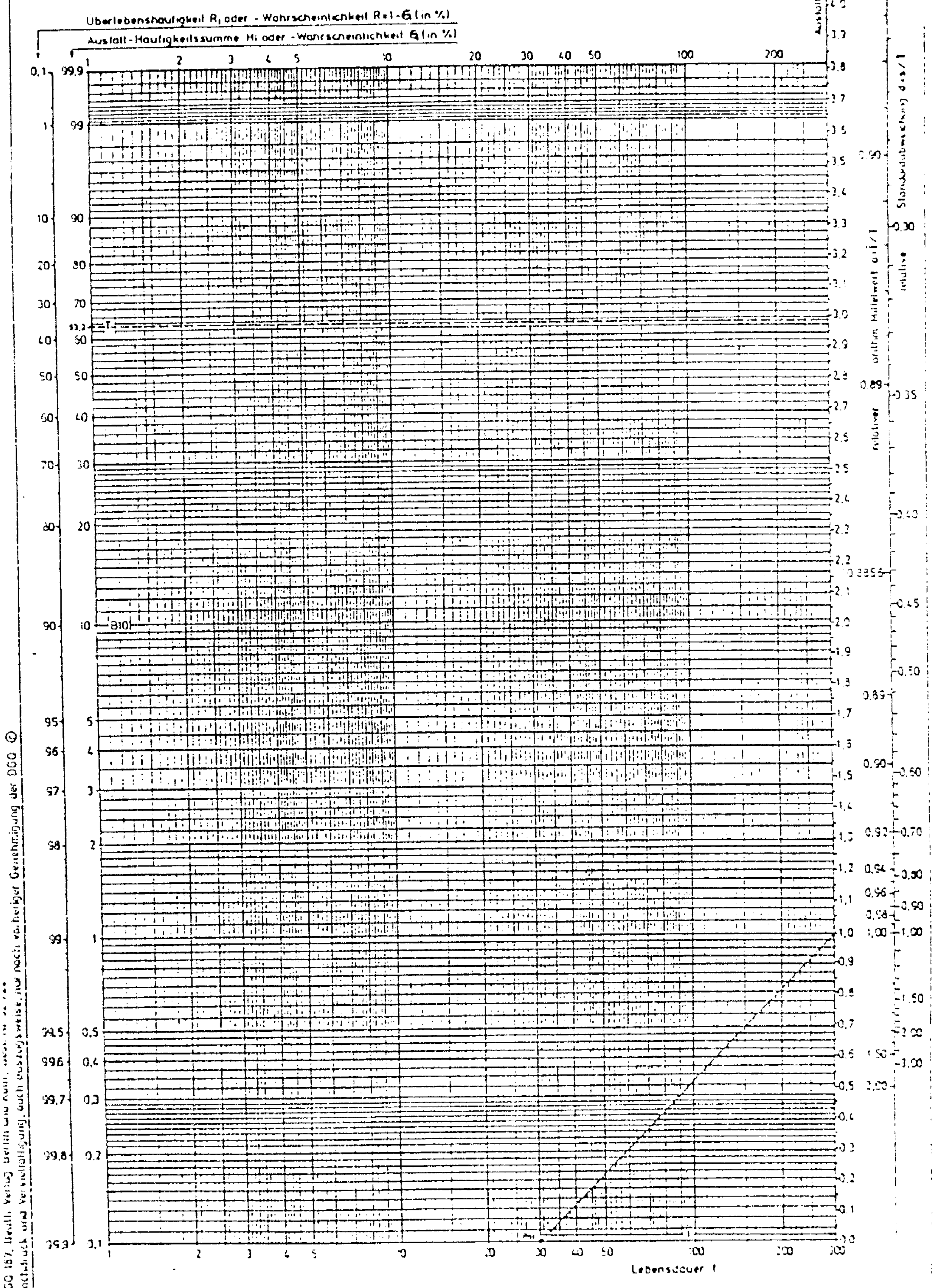
In der Praxis werden entsprechende Vordrucke zum Auswerten von Lebensdauerdaten verwendet, sogenannte <u>Lebensdauernetze</u>.
Die x-Achse ist logarithmisch geteilt.
Auf der y-Achse ist R(t) bzw. G(t) als Funktionsleiter
log (ln (1 / R(t))) bzw. log (ln (1 / (1 - G(t))) aufgetragen.

Zusätzlich sind Skalen zum Ablesen der Ausfallssteilheit b, des relativen Mittelwerts a = $\bar{t}$ / T und der relativen Standardabweichung d = s / T angebracht.

Auf der nächsten Seite ist ein Lebensdauernetz abgebildet.

Lebensdauernetz

Wahrscheinlichkeitsnetz für Weibull-Verteilung



Dr Ske / RS 75 06

Wir wollen nun das Prüfergebnis der Stichprobe von 50 Wälzlagern im Lebensdauernetz auswerten. (Abbildung auf der nächsten Seite)

Als erstes bestimmen wir den Maßstab für die logarithmisch geteilte t-Achse. Wir multiplizieren die angegebenen Werte mit 10^6 .

Über den ersten 15 Zeitpunkten der Prüfung tragen wir die Werte des relativen Bestands $\hat{R}(t)$ als Schätzwerte für $\hat{R}(t)$ auf.[1]
Dazu müssen wir die Werte R(t) von der linken äußeren Skala ablesen.

Durch die so erhaltenen 15 Punkte legen wir eine Ausgleichsgerade.[2]
Diese Gerade stellt die Weibull-Verteilung der Wälzlagerfertigung dar.

Die Überlebenswahrscheinlichkeit von 0.368, bzw. die Ausfallswahrscheinlichkeit von 0.632 tritt bei der charakteristischen Lebensdauer T auf. Der Wert G(T) = 0.632 ist im Lebensdauernetz durch eine waagrechte strichlierte Gerade gekennzeichnet. Durch den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ausgleichsgeraden zeichnen wir eine senkrechte Gerade. Am Schnittpunkt dierser Geraden mit der t-Achse lesen wir die charakteristische Lebensdauer ab: $\underline{T = 12.6 * 10^6}$

Wir zeichnen nun eine Parallele zur Ausgleichsgeraden durch den Pol. An der rechten b-Skala lesen wir ab: $\underline{b = 1.54}$

Damit kennen wir die Lebensdauerverteilung der Wälzlagerfertigung:
Die Überlebenswahrscheinlichkeit lautet:

$$R(t) = \exp(- (t / (12.6 * 10^6))^{1.54})$$

Die Ausfallswahrscheinlichkeit lautet:

$$G(t) = 1 - \exp(- (t / (12.6 * 10^6))^{1.54})$$

Damit können wir einerseits Vorhersagen treffen, wie viele Wälzlager zu einem bestimmten Zeitpunkt noch funktionieren werden bzw. schon ausgefallen sein werden.
Andererseits können wir den Zeitpunkt bestimmen, zu dem die Überlebens- bzw. die Ausfallswahrscheinlichkeit einen bestimmten Wert erreicht.

Wir können auch graphisch die Schätzwerte $\bar{t}$ für die mittlere Lebensdauer μ und s für die Standardabweichung σ bestimmen, ohne mit der Gammafunktion rechnen zu müssen.
Dazu zeichnen wir eine waagrechte Gerade durch den Punkt b = 1.54 .
An der Skala für den relativen Mittelwert $a = \bar{t} / T$ lesen wir ab:
a = 0.9
An der Skala für die relative Standardabweichung d = s / T lesen wir ab: d = 0.59

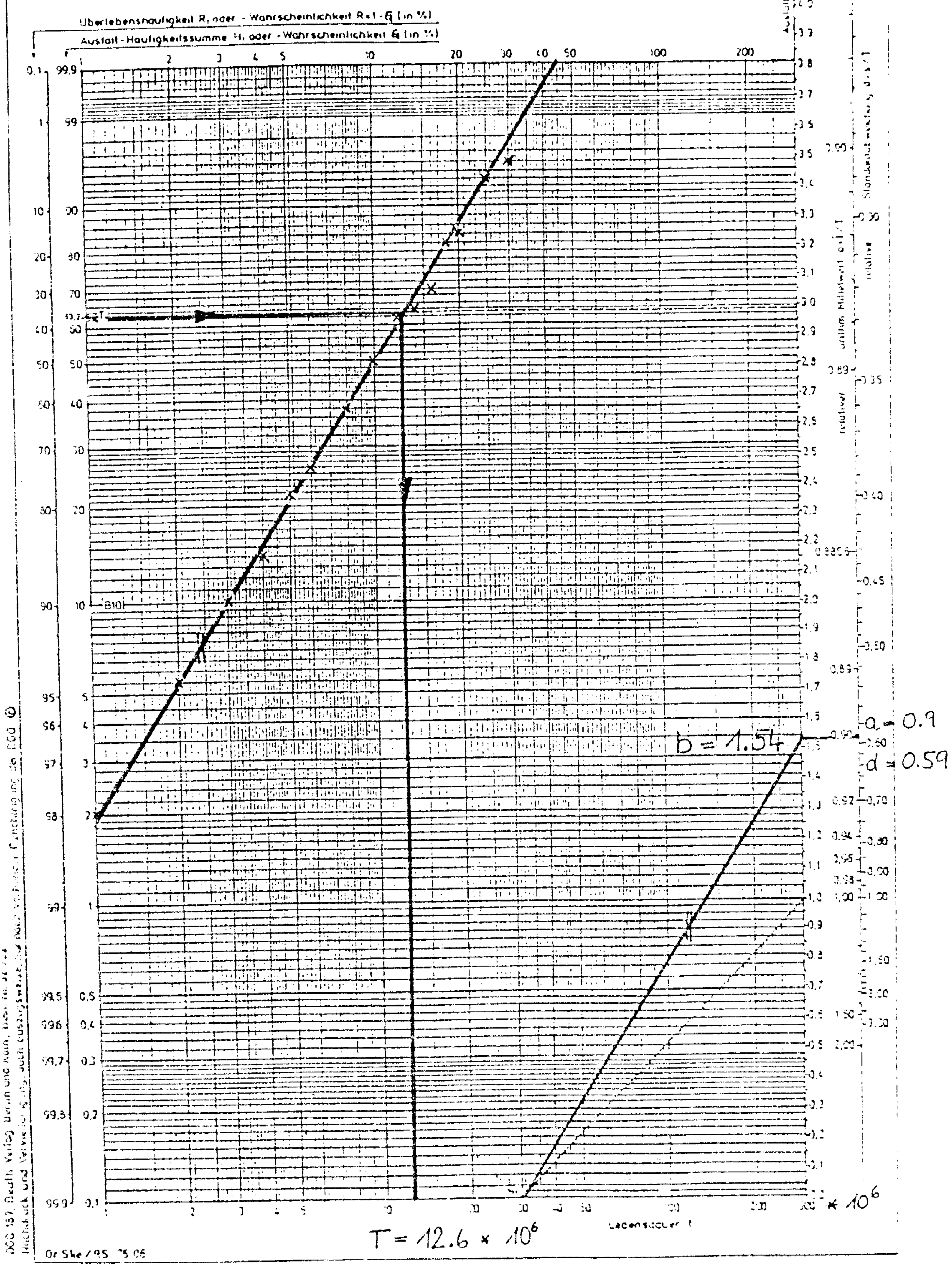
Wir können nun einfach die mittlere Lebensdauer und die Standardabweichung unserer Stichprobe bestimmen:

$$\bar{t} = T * a = 12.6 * 10^6 * 0.9 = \underline{11.3 * 10^6}$$
$$s = T * d = 12.6 * 10^6 * 0.59 = \underline{7.4 * 10^6}$$

[1] Den 16. Punkt können wir nicht eintragen (R(40) = 0).
[2] Das ist gleichzeitig ein visueller Test, ob die Voraussetzung der Weibull-Verteilung zutrifft.

Lebensdauernetz

Wahrscheinlichkeitsnetz für Weibull-Verteilung



Die öVQ[1] bietet im Rahmen ihres Seminarprogramms im Block

QUALITÄTSTECHNIK II

jährlich einen einwöchigen Lehrgang über die Zuverlässigkeitsprüfung an. In diesem Lehrgang wird der hier angebotene Lehrstoff ausführlicher behandelt. Darüber hinaus wird die Annahme-Stichprobenprüfung sowie die Planung und Auswertung von Stichprobenprüfungen für Lebensdauerdaten anhand von zahlreichen Beispielen aus der Praxis erläutert und durchgeführt.

Der Lehrgangsblock Q II richtet sich hauptsächlich an Meister, sowie Absolventen Höherer technischer Lehranstalten und Technischer Universitäten, die in der Industrie auf dem Gebiet der Qualitätssicherung arbeiten.
Er umfaßt sechs einwöchige Lehrgänge und hat die Anwendung der statistischen Methoden in der Qualitätssicherung auf einem mathematischen Niveau, das ungefähr dem dieses Artikels entspricht, zum Inhalt.

Die folgende Abbildung zeigt eine übersicht über den Lehrgangsblock Qualitätstechnik II:

Einführung in die statistischen Methoden der Qualitätssicherung
Stichprobensysteme
Qualitätsregelkarten
Auswertungsverfahren
Zuverlässigkeitsprüfung
Vorbereitung zur Prüfung Q II

P R Ü F U N G Q II

Nach bestandener Püfung Q II besteht die Möglichkeit, einen zweiwöchigen Insstruktorenlehrgang zu absolvieren. Ein positiver Abschluß dieses Lehrgangs berechtigt zur Führung des Titels "öVQ-Instruktor".

Derzeit sind ca. dreißig Professoren im technischen Schulbereich öVQ-Instruktoren. Davon unterrichten zehn, so auch die Verfasserin dieses Artikels, am TGM in Wien.

[1] öVQ - österreichischen Vereinigung für Qualitätssicherung